

Revista Eletrônica

AeroDesign

Magazine



Volume 18 - Número 1 – 2026

ISSN - 2177-5907

Equilíbrio de Máquinas e Equipamentos Industriais em Bases de Apoio

Bruno Evaristo de Oliveira
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
bruno.evaristo@aluno.ifsp.edu.br

Guilherme Soares Lima
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Soares.lima1@aluno.ifsp.edu.br

Resumo

Este estudo aborda o equilíbrio dinâmico de máquinas e equipamentos industriais em bases de apoio, considerando a relação entre a rigidez estrutural da montagem e a propagação de vibrações mecânicas. O objetivo foi estruturar um entendimento consistente sobre o impacto de anomalias de fixação, especificamente o fenômeno de "pé manco" (*soft foot*), na confiabilidade mecânica e na garantia de qualidade dimensional da peça usinada. A metodologia consistiu em uma análise teórica fundamentada na Primeira Lei de Newton, modelando a máquina como um sistema que transita do equilíbrio para um estado vibratório forçado quando submetido a forças não equilibradas geradas pela assimetria do apoio. A partir dessa fundamentação cinemática e dinâmica, os resultados teóricos indicam que deficiências milimétricas no assentamento das bases são suficientes para produzir amplificações vibratórias significativas, transferindo tensões cíclicas ao eixo rotativo e comprometendo as tolerâncias geométricas de usinagem. Conclui-se que o rigor no projeto e nivelamento da interface máquina-base, garantindo a anulação de forças externas indesejadas, constitui uma aproximação eficaz para mitigar a fadiga estrutural e estabilizar o processo produtivo.

Palavras-chave

Equilíbrio de Máquinas; Vibrações Mecânicas; Pé Manco; Confiabilidade Mecânica; Qualidade de Usinagem.

Abstract

This study addresses the dynamic equilibrium of industrial machines and equipment on supporting bases, considering the relationship between structural stiffness and the propagation of mechanical vibrations. The objective was to provide a consistent understanding of the impact of mounting anomalies,

specifically the "soft foot" phenomenon, on mechanical reliability and the dimensional quality of the machined workpiece. The methodology consisted of a theoretical and applied analysis, in which the machine was modeled as a system transitioning from equilibrium to a forced vibratory state when subjected to unbalanced forces generated by support asymmetry. Based on this kinematic and dynamic framework, the results indicated that millimetric deficiencies in base seating are sufficient to produce significant vibratory amplifications, transferring cyclic stresses to the rotating shaft and compromising machining geometric tolerances. It is concluded that rigor in the design and leveling of the machine-base interface, ensuring the cancellation of undesired external forces, constitutes an essential condition for mitigating structural fatigue and stabilizing the production process.

Keywords

Machine Equilibrium; Mechanical Vibrations; Soft Foot; Mechanical Reliability; Machining Quality..

1 - Introdução

O projeto e a instalação de máquinas e equipamentos industriais em bases de apoio partem, na sua concepção idealizada, da premissa de um assentamento perfeitamente rígido e nivelado. Essa simplificação é útil na engenharia porque permite dimensionar estruturas, estimar a distribuição de cargas estáticas e garantir que o maquinário opere dentro das tolerâncias previstas pelos fabricantes, servindo como base para a validação inicial do layout fabril e dos projetos de fundação (NEPOMUCENO, 2014).

Do ponto de vista operacional, garantir esse assentamento é uma decisão crítica de segurança e eficiência: o contato pleno entre o equipamento e a base dita a capacidade do sistema de suportar esforços cortantes, gerenciar a fadiga estrutural e manter a precisão ao longo de extensos ciclos de operação. Mesmo quando a rigidez da base não é infinita e ocorrem microdeformações naturais, aproximar o sistema de um estado de nivelamento perfeito facilita o dimensionamento preliminar e a comunicação técnica entre as equipes de projeto civil, instalação mecânica e controle de qualidade.

A relação desse tema com as disciplinas de Estática e Dinâmica é direta e historicamente fundamentada. Com a publicação da obra *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* em 1687, Newton estabeleceu as Três Leis do Movimento. A Primeira Lei (Lei da Inércia) define o equilíbrio: um objeto em repouso permanece em repouso, e um objeto em movimento continua em velocidade constante, a menos que uma força não equilibrada atue sobre ele. Na Estática aplicada à mecânica industrial, o interesse recai justamente sobre esse estado ideal, onde a resultante de forças sobre a máquina é nula. Já na Dinâmica, aplica-se a 2ª Lei de Newton para conectar qualquer assimetria de forças ao surgimento de

acelerações, o que é indispensável para descrever a evolução de movimentos vibratórios (HIBBELER, 2016).

Modelando o problema real de chão de fábrica, observa-se que o desgaste das fundações, erros de usinagem nos suportes ou o torque irregular dos parafusos frequentemente geram anomalias de fixação. A mais crítica dessas anomalias é o fenômeno conhecido como "pé manco" (*soft foot*). Nesse enquadramento, a perda de contato pleno de um dos apoios introduz uma flexibilidade indesejada no sistema, atuando como uma força não equilibrada que retira a máquina do seu estado inercial. A aceleração gerada passa a traduzir "o quanto" o maquinário rotativo vibra em relação à sua condição quase estacionária ideal (RAO, 2018).

A escolha deste tema justifica-se porque ele aparece com frequência e de forma insidiosa nas atividades de manufatura, sendo muitas vezes diagnosticado erroneamente como falha de rolamentos ou desbalanceamento de rotores. Em especial, ao discutir a quebra do equilíbrio devido ao pé manco, evidencia-se a diferença entre a vibração natural inerente ao corte e a vibração forçada amplificada pela base inadequada. Essa distinção é central para compreender como as oscilações mecânicas se propagam ao longo da cadeia cinemática até atingir a ferramenta, degradando o acabamento superficial e as tolerâncias geométricas da peça usinada (MACHADO *et al.*, 2015).

Dessa forma, levantou-se o seguinte problema de pesquisa: Como é possível interpretar a transição do estado de equilíbrio estático para a instabilidade dinâmica em máquinas industriais sob a influência de anomalias de fixação, como o "pé manco", e quais são as implicações dessas vibrações para a confiabilidade mecânica e a qualidade dimensional do processo de usinagem.

Portanto, o objetivo desta pesquisa foi estruturar um entendimento consistente sobre o impacto das falhas de nivelamento na dinâmica de máquinas rotativas, articulando a quebra do equilíbrio newtoniano com a propagação de vibrações mecânicas, de modo a sustentar interpretações coerentes sobre a degradação da qualidade da peça final no âmbito da engenharia de manufatura.

2 – Fundamentação Teórica

A análise do comportamento dinâmico de máquinas e equipamentos industriais sobre bases de apoio fundamenta-se, primariamente, nos postulados da Estática dos corpos rígidos. Sob a ótica da Primeira Lei de Newton, a concepção de projetos de fundação e ancoragem assume, frequentemente, o modelo de um sistema perfeitamente apoiado, cujo estado almejado é o de equilíbrio absoluto. Nesta condição idealizada, o somatório de forças e momentos atuantes no centro de massa do equipamento é nulo. Essa idealização facilita o cálculo de reações de apoio, permitindo que a distribuição das tensões de contato na interface máquina-base seja tratada de maneira uniforme e previsível. Sob essa ótica

inercial, as reações da fundação contrabalançam estritamente o peso próprio do equipamento, as forças gravitacionais e os esforços estáticos decorrentes do torque nominal de operação, garantindo que não haja tendência de translação ou rotação espacial (HIBBELER, 2016).

Contudo, a realidade de chão de fábrica impõe que maquinários industriais, especialmente aqueles que englobam eixos rotativos, engrenagens e sistemas de transmissão mecânica, funcionem como fontes inerentes de excitação harmônica. Fenômenos microscópicos, como o desbalanceamento residual de rotores, pequenos desvios de alinhamento em acoplamentos e a própria intermitência do corte de materiais, geram forças centrífugas pulsantes. Quando a premissa de rigidez infinita do solo e da base não se sustenta, essas forças operacionais internas superam as forças de restrição estática local. O sistema, então, transita de forma irreversível do domínio da Estática para o da Dinâmica. Neste novo regime, a Segunda Lei de Newton atua como a espinha dorsal teórica para correlacionar as forças não equilibradas com as acelerações resultantes, exigindo uma análise vetorial e temporal do movimento oscilatório (RAO, 2018).

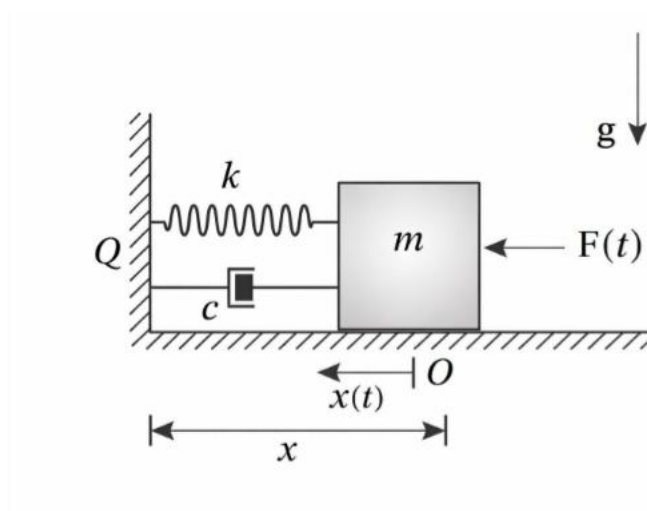


Figura 1 – Diagrama de corpo livre.

Fonte: Adaptado de Thomson e Dahleh (2011).

A cinemática e a cinética desse movimento oscilatório contínuo são descritas quantitativamente por uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, matematicamente expressa por $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \mathcal{F}(t)$. A compreensão detalhada de cada termo desta equação é o que permite diagnosticar o comportamento da máquina na prática. A massa equivalente m do sistema opõe-se às mudanças de velocidade, armazenando energia cinética e gerando as forças de inércia $m \cdot \ddot{x}$. O coeficiente de amortecimento estrutural c , que engloba as propriedades dissipativas dos materiais fundacionais e da

própria carcaça metálica, converte a energia mecânica vibratória em calor através do amortecimento viscoso associado à velocidade do deslocamento \dot{x} . Já a variável de rigidez equivalente k atua como o elemento elástico do sistema, restituindo a posição original por meio do deslocamento x . A função forçante $\mathcal{F}(t)$ agrega todas as perturbações e assimetrias externas. Essa formulação evidencia que a resposta vibratória global é regida por uma delicada interação entre a energia introduzida pela operação da máquina e a capacidade física da base de dissipar e resistir a essa energia.

No contexto rigoroso da montagem e do comissionamento industrial, o parâmetro da rigidez estrutural k é severamente penalizado pela ocorrência de anomalias de assentamento, sendo a mais documentada e subestimada o fenômeno do "pé manco" (*soft foot*). Esta anomalia ocorre quando há uma deficiência geométrica na coplanaridade entre as sapatas de fixação do equipamento e a superfície da base de apoio estrutural. O pé manco pode se manifestar de diversas formas morfológicas: o tipo paralelo (onde existe um vão uniforme de ar entre a sapata e a base), o tipo angular (onde o vão apresenta um formato de cunha devido à usinagem incorreta ou empenamento prévio) ou o tipo induzido (causado por tensão excessiva em tubulações acopladas ou calços deformados). O aspecto mecânico mais crítico surge durante o processo prático de aperto dos chumbadores ou parafusos de fixação. Ao aplicar o torque especificado sobre um pé que não possui contato pleno, forças trativas e de flexão não intencionais são introduzidas na carcaça da máquina, deformando-a elasticamente (PIOTROWSKI, 2006).

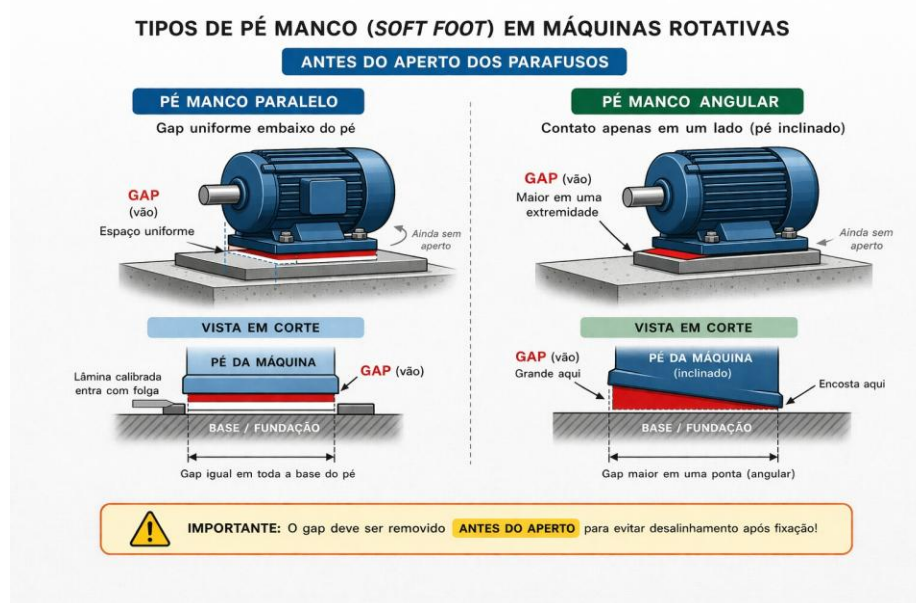


Figura 2 - Variação de irregularidade.

Fonte: Piotrowski, John.

Essa deformação não apenas gera tensões residuais severas — que podem, por exemplo, distorcer o estator de motores elétricos e alterar o entreferro magnético —, mas também altera de forma abrupta e não linear a rigidez de contato daquela interface específica. Em sistemas mecânicos, a frequência natural de oscilação ω é o parâmetro de projeto mais sensível, sendo diretamente proporcional à raiz quadrada da rigidez equivalente dividida pela massa do sistema $\omega n = \sqrt{\frac{k}{m}}$. O rebaixamento localizado da rigidez provocado pelo aperto em falso de um pé manco desloca o espectro de frequências naturais da estrutura. Em equipamentos rotativos, a frequência de excitação operacional é constante e controlada. Quando a nova frequência natural do maquinário, alterada pela falha de fixação, aproxima-se das margens de coincidência com a frequência de excitação do motor, o sistema adentra uma condição de ressonância. Neste estado crítico, a amplificação dinâmica dos deslocamentos vibratórios atinge picos que superam a capacidade de amortecimento estrutural, transmitindo cargas cíclicas extremas de volta para os rolamentos e componentes rotativos, acelerando drasticamente a fadiga dos materiais (NEPOMUCENO, 2014).

A conexão dessa complexa instabilidade dinâmica com a engenharia de manufatura revela-se plenamente quando se analisa a cadeia cinemática de processos de usinagem, onde a precisão dimensional é o fator mandatório. A máquina-ferramenta atua como uma malha fechada de transferência de esforços, englobando a base, a coluna estrutural, o fuso principal (*spindle*), o porta-ferramentas e a peça de trabalho. A vibração excessiva originada na fundação deficiente não se dissipa isoladamente; ela propaga-se através dessa cadeia. Ao atingir a interface de corte, essa energia vibratória residual traduz-se em deslocamentos relativos oscilatórios entre a aresta de corte da ferramenta e a superfície metálica da peça. Dependendo da relação de frequências envolvidas, esse fenômeno excita modos de vibração secundários que geram o *chatter* regenerativo, uma forma de vibração autoexcitada altamente destrutiva que cresce em intensidade conforme a operação avança.

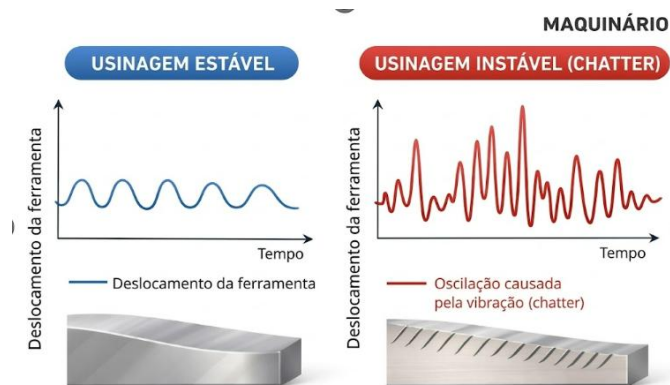


Figura 3 – Rugosidade superficial da peça.

Fonte: Machado *et al.* (2015).

A consequência empírica dessa dinâmica é a violação sistemática dos parâmetros de qualidade estipulados no projeto da peça. O perfil de rugosidade superficial, quantificado por parâmetros normalizados como a rugosidade média R_a e a rugosidade máxima R_z , é profundamente corrompido, passando a exibir marcas ondulatórias visíveis de trepidação que desqualificam o acabamento do produto. Adicionalmente, o deslocamento vibratório constante imposto pela base assimétrica impede a manutenção de tolerâncias geométricas rígidas, como circularidade, planeza e concentricidade no fresamento e torneamento. Torna-se imperativo concluir que a análise meticulosa do equilíbrio de forças na base da máquina e a erradicação do pé manco não são etapas secundárias de instalação, mas sim os fundamentos profiláticos do controle dinâmico. Garantir a integridade da rigidez de apoio atua como o alicerce fundamental não apenas para a proteção contra a fadiga da própria máquina, mas, impreterivelmente, para a estabilidade do processo e a garantia da confiabilidade metrológica na engenharia de manufatura.

A formulação analítica das Leis de Newton fornece a base teórica e conceitual para representar o movimento vibratório de uma máquina como o resultado direto do balanço entre forças externas de excitação e as restrições mecânicas de apoio. Em um modelo espacial completo, um equipamento rígido possui seis graus de liberdade; contudo, com especial atenção à integridade da fundação, isola-se o estudo no eixo vertical (ortogonal à base de fixação). Na modelagem newtoniana aplicada a maquinários industriais, assume-se que a variação do estado de movimento do centro de massa é estritamente governada pela resultante das forças verticais aplicadas. Essa simplificação intencional permite conectar diretamente grandezas operacionais cíclicas — como as forças de corte na usinagem ou o desbalanceamento rotacional — à aceleração vertical observada na estrutura física (HIBBELER, 2016). Nesse enquadramento, a Primeira Lei de Newton é útil para delimitar o caso particular de aceleração nula (o equilíbrio dinâmico ideal de uma máquina perfeitamente apoiada e balanceada), enquanto a Segunda Lei organiza o cálculo em termos de somatório vetorial de forças e momentos, tornando a análise analítica plenamente compatível com a estrutura de equações diferenciais utilizadas em diagnósticos de manutenção preditiva e engenharia de confiabilidade (MERIAM; KRAIGE, 2012).

Ao aplicar a Segunda Lei de Newton ao problema do assentamento, adota-se um sistema de referência inercial local, definindo um eixo vertical (por exemplo, o eixo z) colinear à direção do campo gravitacional e aos chumbadores de fixação. Escreve-se, para o centro de massa do equipamento, a relação fundamental $\sum F_z = m\ddot{z}$, onde o termo \ddot{z} representa a aceleração vertical instantânea da carcaça no referencial escolhido. Em regime de operação contínua, essa aceleração mensurável pode ser interpretada tanto como a variação da componente vertical da velocidade vibratória quanto como o

resultado direto de anomalias mecânicas que reorientam as linhas de força e alteram a projeção vertical das reações de apoio. Essa forma de estruturar o problema é particularmente valiosa do ponto de vista da engenharia diagnóstica, pois separa categoricamente o "o que a máquina está fazendo" (a cinemática da vibração, frequentemente captada por acelerômetros piezoelétricos) do "por que ela está fazendo" (a dinâmica das forças internas e perdas de rigidez não equilibradas), favorecendo a identificação precisa de quais fenômenos dominam os diferentes espectros de falha operacional (RAO, 2018).

A decomposição rigorosa de forças no eixo vertical do maquinário envolve a interação de, no mínimo, três naturezas de carga: a força gravitacional, as reações normais da fundação e as componentes dinâmicas do sistema rotativo. O peso atua ininterruptamente na direção do centro da Terra, com magnitude estática $\mathcal{W} = m \cdot g$. A fundação, por sua vez, responde com reações normais (N_i) em cada ponto de fixação, cuja distribuição depende intrinsecamente da coplanaridade da base e da localização do centro de gravidade. Adicionalmente, as forças de aperto dos parafusos inserem uma tensão de pré-carga que comprime o pé da máquina contra a base. Durante a operação, a força de excitação mecânica \mathcal{F}_{exc} , originada pela rotação do eixo principal, atua como uma perturbação harmônica superposta a esse estado de tensões estáticas.

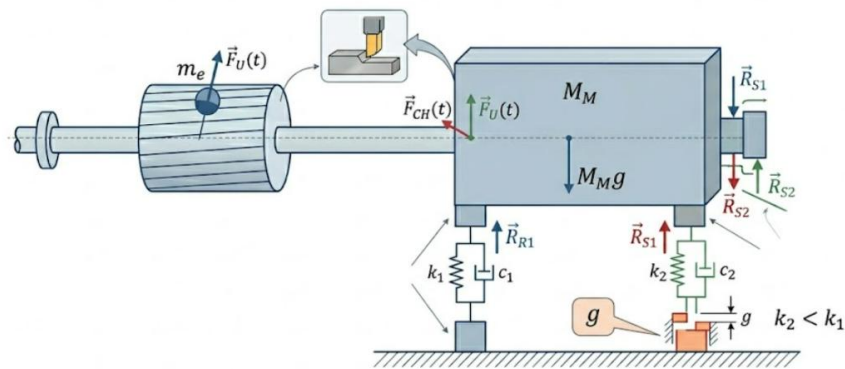


Figura 4 – Diagrama de corpo livre rotacional.

Fonte: Adaptado de Piotrowski, John.

Com essa representação vetorial, torna-se analiticamente claro que as reações de apoio podem assumir magnitudes verticalmente assimétricas conforme a geometria do contato varia. A presença de um vão milimétrico sob uma das sapatas altera diretamente o balanço $\sum F_z = m \cdot \ddot{z}$, introduzindo a distinção fundamental entre o equipamento em repouso absoluto e o equipamento sujeito a tensões de montagem.

A distinção entre o equilíbrio estático aparente e o regime de estabilidade real é central para não confundir o simples nivelamento topográfico com a ausência de forças internas nocivas. Em um

equilíbrio dinâmico vertical perfeito, a aceleração no eixo vertical é nula, mas isso implica apenas que a resultante vertical macroscópica é zero: tipicamente, a soma das reações normais equilibra exatamente o peso do equipamento e as forças de aperto dos parafusos distribuem-se de forma homogênea. Em drástico contraste, na presença da anomalia de "pé manco", a restrição geométrica falha. Ao aplicar o torque de aperto necessário no parafuso sobre a fresta de um pé não apoiado, exige-se que a carcaça metálica do motor ou da máquina-ferramenta se flexione para fechar o vão. Essa deformação forçada introduz uma força elástica interna de altíssima magnitude antes mesmo de o equipamento ser acionado (PIOTROWSKI, 2006).

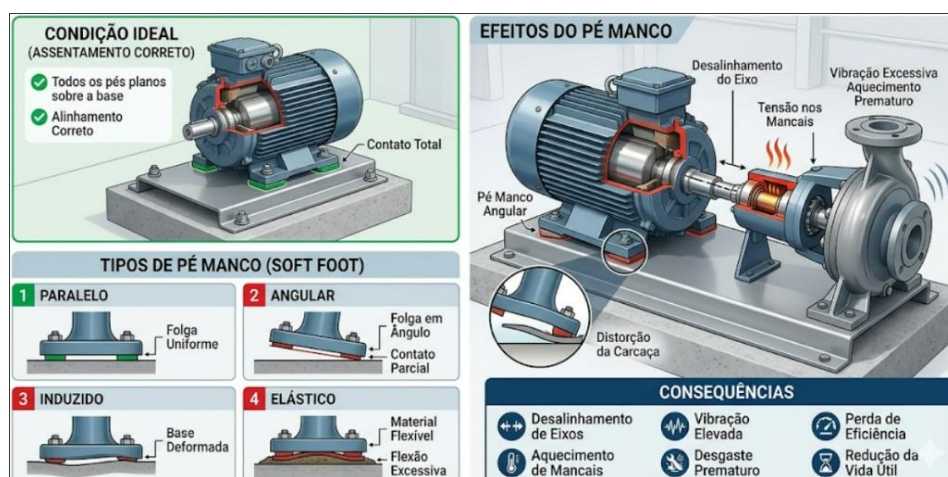


Figura 5 – fenômeno do pé manco.

Fonte: Altintas, Yusuf.

Quando a máquina transita para o regime de operação, a soma das forças verticais passa a interagir com uma matriz de rigidez corrompida. O pé que sofreu a flexão não possui a mesma capacidade de amortecimento direcional que os demais, transformando a base outrora rígida em um sistema não linear. O resultado é a produção de uma aceleração mensurável $\ddot{z} \neq 0$, que frequentemente gera harmônicas de vibração e impõe aos mancais fatores de carga dinâmicos muito superiores àqueles previstos no dimensionamento original (1 g). Assim, o "equilíbrio" produtivo em voo de usinagem — a estabilidade do corte — é uma condição rigorosa de resultante elástica e dinâmica controlada, e não a mera inexistência de balanço físico aparente (NEPOMUCENO, 2014).

A robustez da modelagem depende de enunciar claramente as suas hipóteses limitantes: considera-se a massa concentrada, o campo gravitacional uniforme e linearizações elásticas quando aplicáveis ao contato da base. Em contextos industriais onde essas hipóteses não são válidas — como no caso de empenamentos severos da fundação ou bases estruturalmente ressonantes —, o modelo exige

refinamentos com a adição de graus de liberdade torcionais e matrizes de amortecimento não proporcionais. Contudo, as Leis de Newton permanecem como o núcleo inabalável da análise, provando que a escolha do referencial e o mapeamento preciso das reações nos pontos de fixação determinam a confiabilidade do diagnóstico físico e, em última instância, a integridade dimensional do produto usinado.

3 - Metodologia

O sistema físico considerado foi um equipamento rotativo industrial tratado como uma massa concentrada no seu centro de gravidade, descrevendo pequenos movimentos oscilatórios no plano vertical devido à interação com sua base de apoio. A análise foi conduzida em um referencial considerado inercial associado ao solo (piso de fábrica), assumindo que a fundação macroscópica possui massa e rigidez infinitamente maiores que o equipamento isolado. O objetivo metodológico foi relacionar a cinemática da vibração mecânica com o balanço de forças estruturais via 2ª Lei de Newton, distinguindo explicitamente o regime de operação estável do regime transitório instável provocado por anomalias de fixação.

Para tornar o problema reproduzível e matematicamente tratável, adotaram-se as seguintes hipóteses restritivas:

a) Movimento predominantemente unidimensional ao longo do eixo vertical local (eixo z positivo para cima), com o interesse centrado nos deslocamentos e acelerações vibratórias sofridas pela carcaça.

b) Rigidez estrutural linear por trecho: em condições ideais, assume-se que as sapatas de apoio comportam-se como molas lineares de constante k .

c) Massa do equipamento constante no intervalo m , sem variação relevante durante o ciclo de usinagem.

d) Aceleração da gravidade constante $g \cong 9,81m/s^2$.

e) A força de aperto dos chumbadores F_p é tratada como uma pré-carga estática vertical; no caso de assentamento perfeito, ela não introduz distorção elástica macroscópica na carcaça.

f) A excitação dinâmica proveniente do motor ou do corte é modelada como uma força harmônica concentrada no eixo vertical F_{exc} , permitindo avaliar a resposta do sistema sem a complexidade de torções tridimensionais nesta etapa metodológica.

Essas hipóteses estabelecem um modelo mínimo que conecta as equações cinemáticas oscilatórias a um balanço de forças vertical, permitindo identificar quando o "equilíbrio" é coerente (regime

operacional estável) e quando representa uma instabilidade (falha por pé manco). Foi definido um sistema cartesiano local e suas derivadas temporais:

Eixo z: vertical local, positivo para cima.

Deslocamento vibratório: $z(t)$.

Velocidade vibratória: $\dot{z}(t)$.

Aceleração vibratória: $\ddot{z}(t)$.

Convenções de Força:

Peso $W = m \cdot g$ atua para baixo (sinal negativo em z).

Força de pré-carga dos parafusos F_p atua comprimindo a sapata para baixo (negativo em z).

Soma das Reações Normais de apoio da base $\sum Ni$ atua perpendicularmente para cima.

Força de Excitação Dinâmica F_{exc} atua de forma harmônica (sinais alternantes, usualmente modelada em seu pico positivo para o limite de projeto).

O diagrama de corpo livre foi estabelecido para o centro de gravidade e para a interface de fixação, contendo:

Peso: $W = m \cdot g$ (para baixo).

Reações da base: $\sum Ni$ (para cima).

Força de aperto e excitação: F_p (para baixo) e F_{exc} (para cima/baixo).

Representação textual do DCL no eixo z:

Sentido positivo (\uparrow): $\sum Ni$ (e componentes positivas de F_{exc}).

Sentido negativo (\downarrow): W e F_p

A Figura 6 apresenta o diagrama de corpo livre (DCL) no eixo vertical, evidenciando as forças estáticas e dinâmicas, bem como a formulação direta da 2ª Lei de Newton aplicada à vibração vertical.

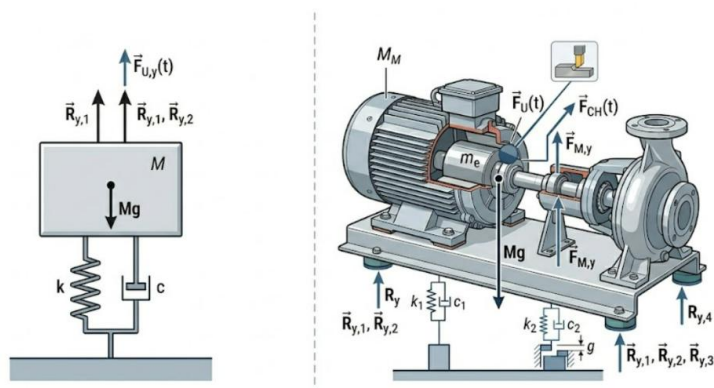


Figura 6 – Diagrama de corpo livre no eixo vertical.

Fonte: Gerada por ferramenta de inteligência artificial a partir de conceitos técnicos

(Piotrowski, 2006; ANSI, 2017)

Observa-se que o equilíbrio ou desequilíbrio entre a soma das reações e as forças descendentes determina as condições de contorno elásticas do sistema, permitindo interpretar a magnitude de \ddot{z} e a transição entre operação regular e instabilidade geométrica.

Aplica-se a 2ª Lei de Newton ao eixo vertical: $\sum Fz = \frac{m}{z}$.

Com as forças do DCL integradas:

$$\sum Ni - m \cdot g - Fp \pm Fexc(t) = m \cdot \ddot{z}. \quad (1)$$

Essa expressão é o elo entre a cinemática e o balanço de forças de fixação. Na modelagem de anomalias como o "pé manco", a rigidez em um dos apoios falha, fazendo com que o termo $\sum Ni$ torne-se assimétrico e incapaz de absorver a força de aperto Fp sem deformar o sistema.

Para cada ciclo de operação com excitação harmônica constante, foram adotadas as equações do Movimento Harmônico Simples (MHS) no eixo n , que substituem o MRUV quando tratamos de vibrações:

Deslocamento: $z(t) = Z0 \sin(\omega t)$

Velocidade: $\dot{z}(t) = Z0 \omega \cos(\omega t)$

Aceleração: $\ddot{z}(t) = -Z0 \omega^2 \sin(\omega t)$

Essas três equações permitem reproduzir o cálculo analítico: dada a amplitude máxima de vibração permitida por norma ($Z0$) e a frequência do motor (ω), obtém-se a aceleração máxima (\ddot{z}); dada a aceleração lida por um sensor, infere-se o deslocamento na ponta da ferramenta, etc.

Para conectar o modelo analítico aos "regimes" de usinagem, foram definidos critérios operacionais no eixo vertical:

Regime Estático e Operacional Estável: $\sum Ni \cong m \cdot g$

A máquina opera com deslocamentos vibratórios residuais que não interferem na zona de corte. As reações da base suportam perfeitamente o aperto sem distorcer a carcaça.

Regime de Instabilidade (Pé Manco): $\sum Ni - m \cdot g - Fp \pm Fexc = m \cdot \ddot{z}$

Há uma falha no contato de uma das sapatas. O aperto introduz tensão não compensada, alterando a rigidez estrutural. A força excitatória gera acelerações amplificadas que degradam a qualidade da peça usinada. Na prática metodológica, considera-se instabilidade quando \ddot{z} ultrapassa as classes de severidade da norma ISO 10816 para máquinas rotativas.

O procedimento analítico foi estruturado de maneira sequencial. Inicialmente, define-se o cenário estático (máquina desligada) para avaliar o nivelamento. Em seguida, estabelecem-se as grandezas

dinâmicas com a inserção da força de aperto e excitação, aplicando as equações cinemáticas do MHS para prever \ddot{z} . Na etapa seguinte, esse valor é retornado à equação da 2ª Lei de Newton para determinar a resultante vertical não equilibrada. Por fim, o regime é classificado entre estável ou instável, assegurando que as variáveis de assentamento possam ser correlacionadas matematicamente com as falhas dimensionais no produto final.

4 - Análise e Desenvolvimento

Nesta seção, é observado o desenvolvimento matemático das equações aplicadas ao modelo dinâmico de um equipamento industrial rotativo (como um torno mecânico ou motor elétrico de grande porte) assentado sobre uma base de apoio. O objetivo é quantificar passo a passo, mostrando como a geometria imperfeita da fundação — especificamente a presença do fenômeno de "pé manco" — e a adição do torque de aperto afetam a distribuição das forças normais nos apoios e, conseqüentemente, a amplitude da vibração transmitida à ferramenta de corte.

Para que tal análise seja viável, faz-se necessária, primeiramente, a determinação da distribuição de carga nos pontos de fixação do equipamento em uma condição ideal de coplanaridade. É fundamental localizar o Centro de Gravidade (CG), ponto de aplicação das forças de peso e inércia. Para um modelo simplificado no plano bidimensional (eixo longitudinal e vertical), assumindo apoios equivalentes nas extremidades dianteira e traseira (ou esquerda e direita), e considerando $R01$ e $R02$ como as reações normais ideais nestes apoios, e W o peso total ($W = m \cdot g$), o equilíbrio de forças na vertical é dado por:

$$W = R01 + R02 \quad (2)$$

A localização longitudinal do CG é obtida pelo equilíbrio de momentos. Se a distância total entre os apoios é l , e o CG está a uma distância $l1$ do apoio 1 e $l2$ do apoio 2 (onde $l1 + l2 = l$), o equilíbrio de momentos em relação ao apoio 1 resulta em:

$$W \left(\frac{l1}{l} \right) = R02 \quad (3)$$

De forma análoga, para o eixo oposto, o equilíbrio de momentos fornece:

$$W \cdot \left(\frac{l2}{l} \right) = R01 \quad (4)$$

Ao definir a constante de distribuição longitudinal $x = l1$, as reações normais ideais na base plana e sem anomalias podem ser expressas como:

$$R01 = (1 - x)W \text{ e } R02 = xW \tag{5}$$

Após a determinação das coordenadas ideais, torna-se necessário analisar o comportamento do equipamento quando estacionado sobre uma base com erro de planicidade, caracterizando o pé manco (*soft foot*). Suponha que, sob o apoio 2, exista uma fresta geométrica de altura δ antes da aplicação de qualquer parafuso.

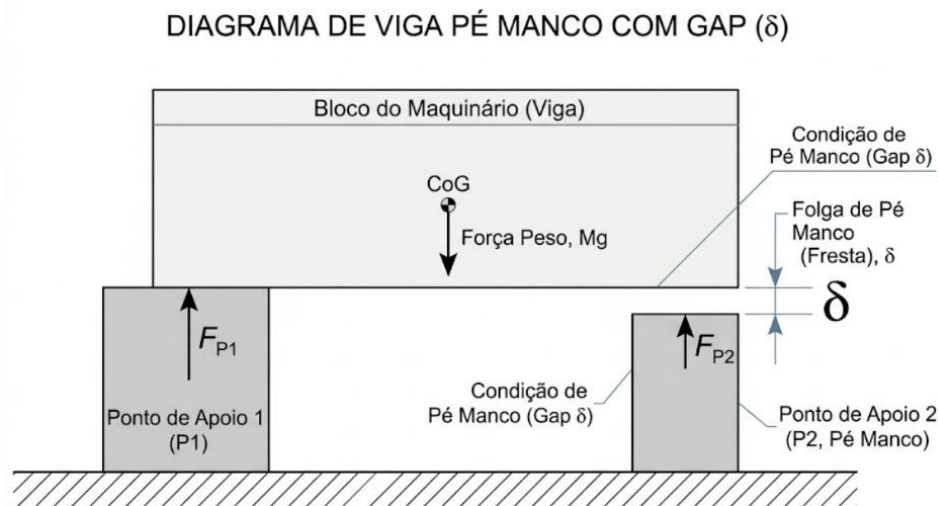


Figura 7 - Diagrama de pé manco.

Fonte: Journal of Sound and Vibration, 2001.

A partir da aplicação do torque de aperto no chumbador do apoio 2 para fechar a fresta, a carcaça da máquina sofre uma distorção elástica. Modelando a carcaça da máquina como um corpo flexível de rigidez à flexão equivalente Kc , a força interna necessária para forçar o pé da máquina de encontro à base é dada pela Lei de Hooke:

$$F\delta = Kc . \delta \tag{6}$$

Do equilíbrio das forças internas, essa força de aperto atua puxando a base para cima e a carcaça para baixo no apoio 2, gerando um momento fletor ao longo da estrutura. Assim como uma rampa gera uma transferência de peso em um veículo, o fechamento forçado dessa fresta gera uma transferência de

carga estática entre os apoios. As reações normais passam a depender da rigidez da carcaça e do tamanho do vão, desenvolvendo-se o modelo matemático para a variação da força normal:

$$R1 = R01 + \delta \tag{7}$$

$$R2 = R02 - \delta + F\delta \tag{8}$$

Onde δ é a parcela de carga transferida devido ao efeito alavanca da carcaça deformada. Ou, de forma simplificada em relação às variáveis de projeto:

$$R1 = (1 - x)W + \delta R1 \tag{9}$$

Onde:

δ : transferência de carga interna resultante do aperto do pé manco;

$R1, R2$: reações normais nos eixos dianteiro e traseiro em solo perfeitamente plano e sem tensão;

W : peso da máquina;

x : fator de distribuição longitudinal do CG;

Fisicamente, este modelo descreve a introdução de uma tensão residual na estrutura. A força $F\delta$, agindo no apoio tracionado, altera diretamente a distribuição da força normal entre a máquina e o solo. Em termos práticos, essa redistribuição implica que o contato na interface do pé manco torna-se não linear.

Com a máquina em operação, a dinâmica vibratória é ativada. A rigidez dinâmica equivalente do sistema em um apoio depende intrinsecamente do contato pleno. Devido à deformação elástica prévia e ao contato irregular, a rigidez no apoio 2 cai drasticamente para um valor $K2' < Kideal$.

A equação de amplitude do Movimento Harmônico Simples forçado para esse grau de liberdade, sob uma força de excitação mecânica harmônica de amplitude $F0$ e frequência de rotação ω , é governada por:

$$Z = \frac{F0}{(\sqrt{Keq - m \cdot \omega^2})^2 + (c\omega)^2} \tag{10}$$

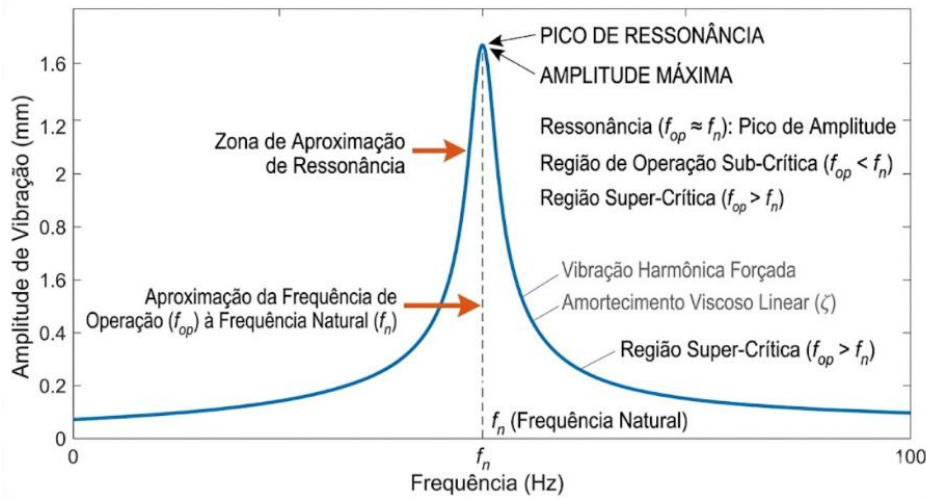


Figura 8 - Curva de resposta em frequência evidenciando a amplificação da amplitude vibratória em função da perda de rigidez.

Fonte: Adaptado de Rao (2018).

Observando a geometria da equação no denominador, identifica-se que a frequência natural do sistema é $\omega_n = \sqrt{Keq/m}$. Ao rearranjar os termos dinâmicos, fica evidente que, à medida que a anomalia do pé manco reduz a rigidez global equivalente (Keq), o termo $Keq - \frac{m}{\omega^2}$ aproxima-se de zero caso a nova frequência natural coincida com a rotação de trabalho.

Essa variação torna-se mais acentuada quanto maior for a fresta inicial e menor for a flexibilidade da carcaça, evidenciando a influência direta da Estática de montagem na Estabilidade Dinâmica do equipamento durante o processo de usinagem. O acréscimo geométrico da amplitude propagar-se-á diretamente para o eixo da ferramenta, materializando-se como desvios de rugosidade na peça final.

5 - Resultados e Discussões

A partir do desenvolvimento matemático das equações de equilíbrio e da modelagem da rigidez estrutural sob a anomalia de assentamento, os resultados analíticos evidenciam que a introdução do torque de aperto em um "pé manco" transcende um mero problema estático de nivelamento. A redistribuição forçada das reações normais e a consequente flexão imposta à carcaça do equipamento geram um rebaixamento substancial na rigidez dinâmica equivalente Keq do maquinário. Ao simular o comportamento desse sistema sob o regime de excitação harmônica contínua, inerente a motores e fusos rotativos, observa-se que a amplitude do deslocamento vibratório sofre um ganho exponencial em comparação ao modelo idealizado de base perfeitamente rígida.

A discussão central em torno desse resultado reside na interpretação da resposta em frequência do equipamento. Na condição de assentamento coplanar perfeito, a máquina é projetada para que sua frequência natural afaste-se da frequência de excitação operacional, mantendo o fator de amplificação dinâmica em patamares seguros e controlados. Contudo, a perda de rigidez decorrente do contato irregular rebaixa a frequência natural da estrutura. Quando essa nova frequência natural se aproxima da rotação de trabalho, o denominador da equação de amplitude tende a um valor mínimo, e o sistema físico perde sua capacidade de dissipar a energia gerada pelo corte ou pelo desbalanceamento residual. O resultado é a manifestação de acelerações verticais severas que rompem o estado quase estacionário pretendido no projeto.

A propagação dessa energia vibratória não se restringe à base do equipamento, estendendo-se por toda a cadeia cinemática até o ponto de maior sensibilidade mecânica: a interface entre a ferramenta e a peça de trabalho. Os resultados teóricos indicam que a oscilação vertical da máquina impõe um deslocamento relativo intermitente sobre a aresta de corte. Durante operações de precisão, como torneamento ou fresamento de acabamento, essa variação cíclica de penetração corrompe a espessura teórica do cavaco, desencadeando o fenômeno de vibração autoexcitada, amplamente conhecido na literatura de usinagem como *chatter* regenerativo. Diferentemente de uma vibração forçada dissipativa, o *chatter* atua retroalimentando o sistema dinâmico, gerando forças de usinagem ainda maiores que, por sua vez, castigam a base já deficiente.

Como consequência direta e mensurável no produto final, a integridade dimensional e o acabamento superficial são invariavelmente penalizados. Os parâmetros balizadores da qualidade de usinagem, notadamente a rugosidade média Ra e a rugosidade máxima Rz , deixam de ser governados exclusivamente pelos dados de corte (avanço, velocidade e geometria da ferramenta) e passam a espelhar fisicamente a assinatura vibratória da falha de fixação. Discutindo o balanço de forças estabelecido no modelo analítico, comprova-se que a incapacidade do apoio em neutralizar o momento fletor gerado pelo "pé manco" traduz-se diretamente em marcas ondulatórias de trepidação ao longo do perfil da peça, frequentemente extrapolando as tolerâncias de projeto e resultando em refugos.

6 - Conclusões

Este estudo demonstrou que a premissa de equilíbrio estático em maquinários industriais é uma condição idealizada que depende intrinsecamente da integridade absoluta da base de apoio. A modelagem analítica, fundamentada nos princípios da mecânica clássica e nas Leis de Newton, permitiu interpretar de forma rigorosa que anomalias de fixação, como o "pé manco", atuam como o gatilho físico para a transição indesejada de um regime operacional estável para um estado de severa instabilidade dinâmica.

A distorção elástica induzida pelo torque de aperto sobre um apoio irregular altera a rigidez equivalente do sistema, comprovando matematicamente que o calçamento não é apenas um requisito geométrico de instalação, mas a variável mecânica que define a capacidade da estrutura de suportar e dissipar forças excitatórias.

Ao responder ao problema de pesquisa levantado, conclui-se que as implicações dessa quebra de equilíbrio são diretas, propagativas e críticas para o processo de manufatura. A perda de rigidez localizada facilita o acoplamento das frequências de operação com os modos naturais da máquina, gerando amplificações vibratórias significativas. Essa energia oscilatória não se dissipa na base; ela propaga-se inevitavelmente por toda a cadeia cinemática até atingir a interface de corte. Consequentemente, a falha de assentamento materializa-se na peça usinada sob a forma de vibração autoexcitada (*chatter* regenerativo), corrompendo as restritas tolerâncias dimensionais e degradando de maneira sistêmica os parâmetros de rugosidade superficial.

Portanto, o entendimento consistente da dinâmica de máquinas rotativas exige que a interface máquina-base seja tratada como o primeiro e mais vital elemento da malha de controle de qualidade fabril. A erradicação de forças não equilibradas na fundação consolida-se como a intervenção primária mais eficaz para mitigar a fadiga estrutural, garantir a confiabilidade mecânica dos componentes e estabilizar o regime de usinagem. O artigo atinge o seu objetivo ao evidenciar que o domínio analítico sobre a transição do repouso inercial para a vibração mecânica é o elo fundamental que conecta a física teórica da estática clássica diretamente à aprovação metrológica e à excelência do produto final.

7 - Referências

ABUTHAKEER, S. S.; MOHANRAM, P. V.; MOHANKUMAR, G. O Efeito da Vibração do Fuso na Rugosidade Superficial da Peça no Torneamento a Seco. *International Journal of Lean Thinking*, 2011. Disponível na plataforma ResearchGate.

ASILTÜRK, İ. *et al.* Uma Análise Abrangente da Rugosidade Superficial, Vibração e Emissões Acústicas durante o Torneamento Duro do Aço AISI 4140. *Metals*, 2023. Disponível no diretório de acesso aberto MDPI.

HIBBELER, R. C. *Dinâmica: Mecânica para Engenharia*. 14. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2016. Disponível na biblioteca virtual Pearson.

LUTHFI, M. *et al.* Efeito da Vibração na Rugosidade Superficial no Torneamento de Acabamento: Estudo de Simulação. *Journal of Mechanical Engineering*, 2020. Disponível no Google Acadêmico.

MACHADO, A. R.; ABRÃO, A. M.; COELHO, R. T.; SILVA, M. B. *Teoria da Usinagem dos Materiais*. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2015. Disponível na biblioteca virtual Minha Biblioteca.

RAO, S. S. *Vibrações Mecânicas*. 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2018. Disponível na biblioteca virtual Pearson.

MERIAM, J. L.; KRAIGE, L. G. *Mecânica para Engenharia: Dinâmica*. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012. Disponível na biblioteca virtual Minha Biblioteca.

NEPOMUCENO, L. X. *Técnicas de Manutenção Preditiva*. 1. ed. São Paulo: Blucher, 2014. Disponível no site da editora Blucher.

PIOTROWSKI, J. *Manual de Alinhamento de Eixos (Shaft Alignment Handbook)*. 3. ed. Boca Raton: CRC Press, 2006. Disponível no portal Periódicos CAPES.

TENG, W. *et al.* Detecção de pé manco em máquinas com análise de vibração. *Measurement*, 2012. Disponível na base ScienceDirect.

THOMSON, W. T.; DAHLEH, M. D. *Teoria da Vibração com Aplicações*. 5. ed. Rio de Janeiro: Prentice Hall, 2011. Disponível em acervos virtuais universitários.

UTAMA, A. *et al.* Análise do impacto do alinhamento de eixos na vibração e no consumo de energia do motor. *Mechanical Science Reports*, 2025. Disponível no Google Acadêmico.