



Vibrações Mecânicas

Prof. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues



Aula - 1

Conceitos Fundamentais



Conteúdos Abordados Nessa Aula

Aula 1

-  Definição de Vibrações Mecânicas;
-  Elementos de um Sistema Vibratório;
-  Classificação das Vibrações;
-  Graus de Liberdade;
-  Efeitos Positivos e Negativos das Vibrações;
-  Métodos de Análise de Vibrações.



Definição de Vibrações Mecânicas

Aula 1

-  As vibrações mecânicas podem ser definidas como um movimento oscilatório de um corpo em torno de uma posição de equilíbrio.
-  Esse fenômeno ocorre quando uma estrutura ou um sistema mecânico é submetido a uma força que provoca deslocamentos periódicos ou quase periódicos em relação à sua posição estática.
-  Em termos gerais, toda vez que um corpo é deslocado de sua posição de equilíbrio e, em seguida, liberado, forças internas, como a elasticidade, tendem a restaurá-lo, enquanto forças inerciais provocam a continuidade do movimento, resultando em uma oscilação.



Comportamento Vibratório

Aula 1

- 🌐 O comportamento vibratório de um sistema mecânico pode variar significativamente em função de diversos fatores, tais como suas propriedades físicas (massa, rigidez e amortecimento) e as características da força excitadora.
- 🌐 Assim, as vibrações podem ser classificadas de várias formas: livres ou forçadas, dependendo da presença ou não de uma força externa contínua; amortecidas ou não amortecidas, conforme haja ou não mecanismos que dissipem energia, como a resistência do ar ou dispositivos específicos de amortecimento.



- As vibrações podem ocorrer em diferentes regimes, podendo ser harmônicas, quando seguem um padrão senoidal regular, ou irregulares, quando apresentam comportamentos complexos e imprevisíveis, como é comum em sistemas não-lineares ou expostos a forças aleatórias.
- A análise e o controle das vibrações mecânicas são fundamentais na engenharia, pois a presença excessiva ou inadequada dessas oscilações pode comprometer o desempenho, a segurança e a durabilidade de equipamentos e estruturas.
- As vibrações mecânicas constituem um fenômeno intrínseco aos sistemas físicos, cuja compreensão exige o estudo das interações entre forças restauradoras, inerciais e dissipativas, sendo um campo essencial na análise de problemas relacionados à estabilidade, ao conforto e à integridade estrutural em diversas aplicações industriais, civis e tecnológicas.



Importância do Estudo das Vibrações Mecânicas

Aula 1

- ✈ O estudo de vibrações mecânicas desempenha um papel fundamental na engenharia, uma vez que a compreensão e o controle desse fenômeno são indispensáveis para garantir a segurança, a eficiência e a durabilidade de sistemas e estruturas.
- ✈ As vibrações estão presentes em praticamente todas as aplicações da engenharia, desde o funcionamento de máquinas industriais e veículos automotivos até o comportamento estrutural de edifícios, pontes e aeronaves.
- ✈ Ignorar ou subestimar os efeitos das vibrações pode resultar em falhas catastróficas, como colapsos estruturais, desgastes prematuros, ruídos indesejáveis e desconforto para os usuários.



Compreensão do Estudo das Vibrações

Aula 1

- ✈ Ao compreender os princípios que regem as vibrações, os engenheiros são capazes de projetar sistemas que minimizem seus efeitos nocivos e potencializem suas aplicações benéficas.
- ✈ **Engenharia Mecânica:** No campo da engenharia mecânica, a análise vibracional é essencial para evitar a ressonância, situação em que a frequência natural de um sistema coincide com a frequência de uma força excitadora, amplificando os deslocamentos e podendo levar à falha estrutural.
- ✈ **Engenharia Civil:** Já na engenharia civil, o estudo das vibrações é imprescindível na concepção de edifícios e pontes que devem resistir a eventos sísmicos ou ao tráfego intenso, assegurando a integridade das construções e a segurança das pessoas.



Compreensão do Estudo das Vibrações

Aula 1

-  **Engenharia Aeroespacial:** Na engenharia aeroespacial, o conhecimento das vibrações é determinante para o desenvolvimento de aeronaves e veículos espaciais que operem de maneira estável e segura em condições extremas.
-  **Engenharia Automotiva:** Na engenharia automotiva, a análise vibracional contribui para a otimização do desempenho, da durabilidade e do conforto dos veículos, reduzindo ruídos e vibrações indesejadas.
-  **Indústria:** Em setores industriais, a manutenção preditiva baseada em monitoramento de vibrações permite a detecção precoce de falhas em máquinas rotativas, aumentando a confiabilidade dos equipamentos e reduzindo custos operacionais.



Aplicações na Engenharia

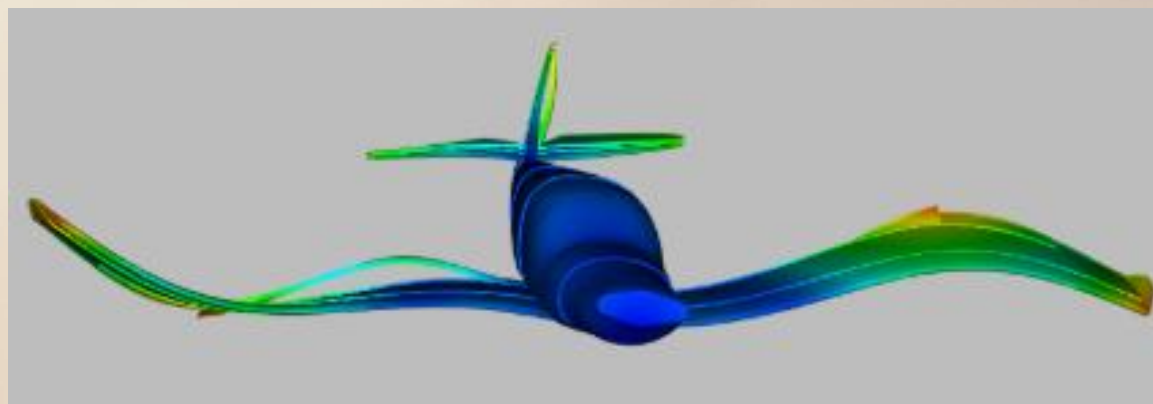
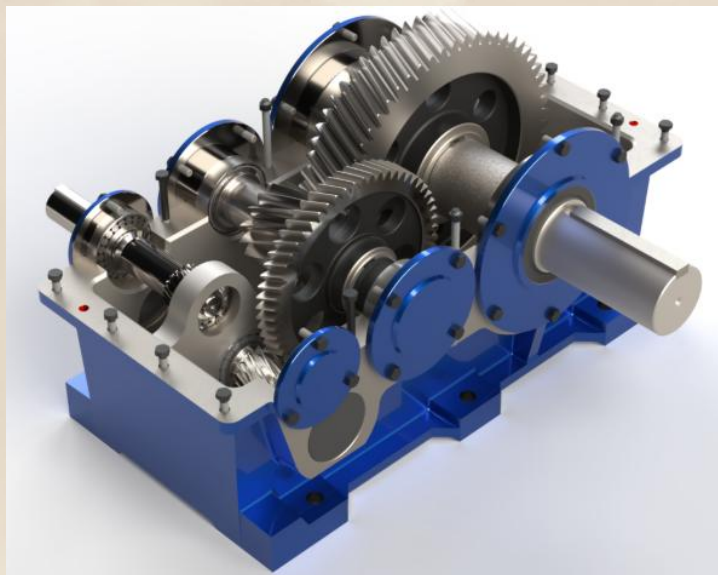
Aula 1

-  O estudo de vibrações mecânicas é indispensável na engenharia, pois possibilita a identificação e a mitigação de riscos associados aos fenômenos vibratórios, além de fomentar inovações tecnológicas que promovem maior eficiência, segurança e conforto nos mais diversos setores da sociedade.
-  **Engenharia Mecânica:** análise de motores, turbinas, caixas de engrenagem.
-  **Engenharia Civil:** estruturas sujeitas a sismos e ventos.
-  **Engenharia Aeroespacial:** análise de aeroelasticidade e flutter.
-  **Engenharia Automotiva:** conforto acústico e estabilidade veicular.
-  **Indústria:** máquinas vibratórias, controle de processos.



Aplicações na Engenharia

Aula 1





-  Um sistema vibratório é composto por partes elementares que determinam seu comportamento dinâmico e influenciam diretamente as características das vibrações que ele apresenta.
-  As três componentes fundamentais de um sistema vibratório são a massa, a rigidez e o amortecimento, cada uma desempenhando um papel específico na geração e na resposta do sistema às forças excitadoras.
-  **Massa:** A massa é o elemento responsável por representar a inércia do sistema, ou seja, sua tendência de resistir às mudanças em seu estado de movimento. Quando uma força é aplicada a um sistema com massa, ela gera uma aceleração proporcional à intensidade da força e inversamente proporcional à massa, conforme estabelece a segunda lei de Newton. Assim, a presença da massa é essencial para que o sistema tenha capacidade de armazenar energia cinética durante o movimento vibratório.



-  **Rigidez:** A rigidez, por sua vez, corresponde à propriedade do sistema que determina sua resistência à deformação. Ela está associada a elementos elásticos que, quando submetidos a uma força, sofrem uma deformação proporcional, mas tendem a restaurar a configuração original assim que a força é removida, gerando forças restauradoras. A rigidez é, portanto, o componente que permite o armazenamento de energia potencial elástica no sistema e define, juntamente com a massa, a frequência natural das vibrações.
-  **Amortecimento:** O amortecimento é o elemento responsável pela dissipação de energia do sistema ao longo do tempo. Em qualquer movimento vibratório real, sempre há alguma forma de resistência, seja devido ao atrito entre superfícies, à resistência do ar ou a dispositivos específicos projetados para absorver energia vibracional. O amortecimento reduz a amplitude das vibrações e, dependendo de sua intensidade, pode provocar a extinção completa do movimento ao longo do tempo. Assim, ele é fundamental para o controle das vibrações indesejadas e para garantir a estabilidade do sistema.



Elementos de um Sistema Vibratório

Aula 1

- ✈ Esses três elementos (massa, rigidez e amortecimento) interagem de forma conjunta e determinam as principais características do sistema vibratório, como sua frequência natural, sua resposta a forças externas e a duração das vibrações.
- ✈ A compreensão de cada uma dessas partes é essencial para a modelagem, análise e projeto de sistemas vibratórios eficientes, seguros e adequados às mais diversas aplicações na engenharia.





Classificação das Vibrações

Aula 1

-  **Quanto à excitação:** As vibrações livres (sem forças externas após perturbação) e as vibrações forçadas (sob ação contínua de forças externas) são duas categorias fundamentais que descrevem a maneira como um sistema vibratório pode oscilar em resposta a diferentes condições.
-  **Quanto à presença de amortecimento:** As vibrações não amortecidas e as vibrações amortecidas são classificações que descrevem o comportamento de um sistema vibratório em relação à presença ou ausência de mecanismos de dissipação de energia.
-  **Quanto à periodicidade:** As vibrações periódicas (exemplo: forças senoidais) e aleatórias (exemplo: vibrações induzidas pelo vento). representam duas formas distintas de manifestação dos movimentos vibratórios em sistemas físicos, diferenciando-se principalmente pela regularidade ou imprevisibilidade do comportamento ao longo do tempo.
-  **Quanto ao número de graus de liberdade:** Sistemas de 1 grau de liberdade (1 GDL), Sistemas de 2 graus de liberdade (2 GDL) e Sistemas de múltiplos graus de liberdade.



Vibrações Livres

Aula 1

- As vibrações livres ocorrem quando um sistema é inicialmente deslocado de sua posição de equilíbrio e, em seguida, liberado, passando a oscilar unicamente sob a ação das forças internas de restauração, como a elasticidade, e das forças inerciais associadas à massa.
- Nesse tipo de vibração, após o impulso inicial, não há mais nenhuma força externa atuando continuamente sobre o sistema, de modo que o movimento subsequente depende exclusivamente das propriedades inerentes ao sistema, como sua massa, rigidez e nível de amortecimento.
- Em sistemas não amortecidos, as vibrações livres podem persistir indefinidamente, enquanto em sistemas amortecidos a tendência natural é que a amplitude do movimento diminua gradativamente até cessar, em decorrência da dissipação de energia.



Vibrações Forçadas

Aula 1

-  As vibrações forçadas ocorrem quando um sistema é submetido a uma força externa que atua de maneira contínua ou periódica, impondo ao sistema um movimento que pode ter características diferentes daquelas que ele apresentaria se estivesse vibrando livremente.
-  Nesse caso, a resposta vibratória depende tanto das propriedades do sistema quanto das características da força excitadora, como sua frequência, amplitude e forma de aplicação.
-  Um fenômeno de grande relevância associado às vibrações forçadas é a ressonância, que acontece quando a frequência da força excitadora se aproxima ou coincide com a frequência natural do sistema, resultando em amplitudes de vibração significativamente elevadas, as quais podem comprometer a integridade estrutural e a segurança do sistema.



Distinção entre Vibrações Livres e Forçadas

Aula 1

- ✈ A distinção entre vibrações livres e forçadas reside, essencialmente, na presença ou ausência de uma força externa atuante após a perturbação inicial.
- ✈ Enquanto as vibrações livres são determinadas exclusivamente pelas condições iniciais e pelas propriedades internas do sistema, as vibrações forçadas envolvem uma interação contínua com agentes externos, o que pode gerar comportamentos dinâmicos mais complexos.
- ✈ A compreensão dessas duas formas de vibração é fundamental na engenharia, pois permite a análise adequada dos sistemas sob diferentes condições de funcionamento e orienta o desenvolvimento de soluções para minimizar efeitos indesejados ou potencializar aplicações específicas.



Vibrações Não Amortecidas

Aula 1

- 🌐 As vibrações não amortecidas ocorrem quando o sistema oscila sem que haja qualquer forma significativa de resistência que consuma a energia do movimento.
- 🌐 Nesse caso, a energia inicialmente fornecida ao sistema, ao ser deslocado de sua posição de equilíbrio, é conservada e alterna-se continuamente entre as formas cinética e potencial elástica, resultando em oscilações de amplitude constante e duração indefinida, desde que não existam perdas de energia para o meio ambiente ou para o próprio sistema.
- 🌐 Embora esse tipo de vibração seja uma idealização frequentemente utilizada para simplificar o estudo teórico e a modelagem matemática dos sistemas vibratórios, na prática, é praticamente impossível encontrar sistemas que vibrem de forma totalmente não amortecida, pois sempre existem resistências, ainda que mínimas, decorrentes de fatores como atrito, histerese ou resistência do ar.



Vibrações Amortecidas

Aula 1

- As vibrações amortecidas são aquelas em que há presença de forças dissipativas que consomem parte da energia do sistema à medida que ele oscila.
- O amortecimento pode ter origens diversas, como o atrito entre superfícies, a viscosidade de fluidos, a resistência aerodinâmica ou ainda dispositivos especialmente projetados para absorver energia vibratória, como amortecedores mecânicos.
- Devido à ação do amortecimento, a amplitude das oscilações tende a diminuir progressivamente com o tempo, até que o sistema retorne ao seu estado de repouso ou alcance um regime permanente de vibração, dependendo da natureza das forças excitadoras.
- A intensidade do amortecimento é um fator determinante no comportamento dinâmico do sistema: quando ele é leve, o sistema pode continuar a oscilar por um tempo relativamente longo antes de cessar; quando é crítico ou supercrítico, o movimento pode ser rapidamente suprimido após a perturbação inicial.



Diferenças entre as Vibrações

Aula 1

-  A principal diferença entre as vibrações não amortecidas e as amortecidas reside na presença e no efeito das forças dissipativas.
-  Enquanto nas vibrações não amortecidas a energia do sistema permanece constante e o movimento persiste indefinidamente, nas vibrações amortecidas a energia é gradativamente dissipada, levando à atenuação das oscilações.
-  O estudo dessas duas categorias de vibração é essencial para a engenharia, pois permite prever com precisão o comportamento real dos sistemas mecânicos e projetar soluções adequadas para mitigar os efeitos indesejados das vibrações, garantindo a segurança, a durabilidade e o desempenho eficiente das estruturas e equipamentos.

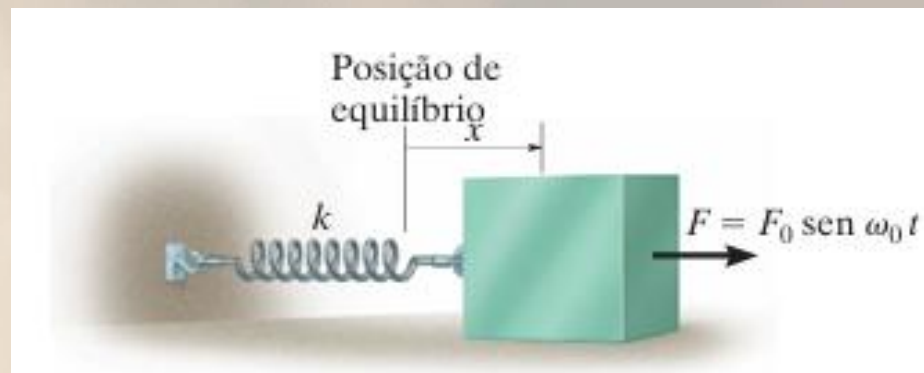


Distinção entre os Modelos nas Vibrações

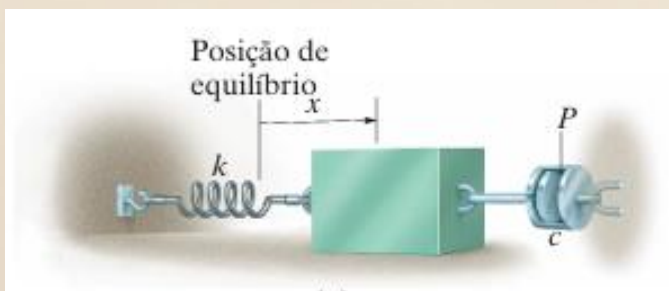
Aula 1



Livre sem Amortecimento



Forçada sem Amortecimento



Livre com Amortecimento



Forçada com Amortecimento



Vibrações Periódicas

Aula 1

-  As vibrações periódicas são aquelas que se repetem de maneira regular e previsível, seguindo um padrão que se repete após intervalos de tempo constantes.
-  Esse tipo de vibração é caracterizado pela existência de uma frequência definida, podendo ser expressa de forma senoidal simples ou como uma combinação de várias funções harmônicas, como ocorre nas vibrações compostas.
-  A previsibilidade das vibrações periódicas facilita sua análise matemática e prática, sendo comum em diversos sistemas mecânicos sujeitos a forças excitadoras regulares, como motores, turbinas e outras máquinas rotativas.
-  A identificação das frequências presentes em uma vibração periódica permite, por exemplo, o diagnóstico de falhas e a prevenção de fenômenos perigosos como a ressonância.



Vibrações Aleatórias

Aula 1

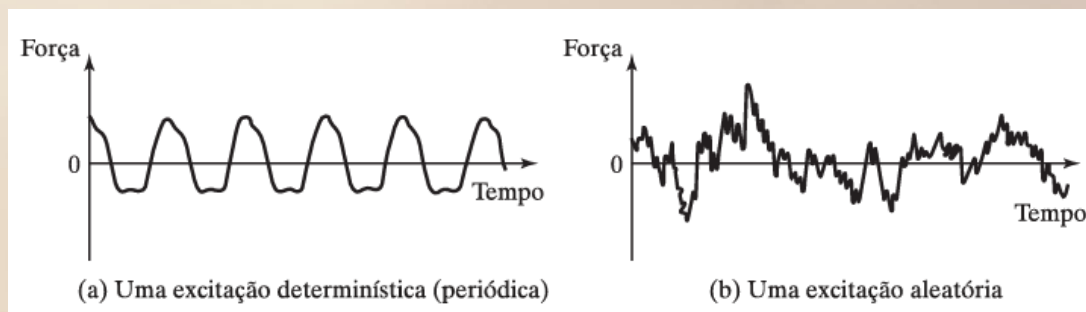
-  As vibrações aleatórias são aquelas que não seguem um padrão fixo ou determinístico, apresentando uma variação irregular e imprevisível ao longo do tempo.
-  Esse tipo de vibração é resultado de forças excitadoras cujas características variam de maneira complexa e, muitas vezes, caótica, não podendo ser descritas por funções matemáticas simples e periódicas.
-  Em vez disso, as vibrações aleatórias são analisadas por meio de métodos estatísticos, como funções de densidade espectral de potência, que permitem caracterizar a distribuição de energia vibratória em diferentes faixas de frequência.
-  As vibrações aleatórias são comuns em ambientes onde múltiplas fontes de excitação atuam simultaneamente e de forma desordenada, como no tráfego rodoviário, em turbulências atmosféricas que afetam aeronaves, ou em estruturas expostas a ventos e ondas marítimas.



Distinção entre Vibrações Periódicas e Aleatórias

Aula 1

- ❶ A distinção entre vibrações periódicas e aleatórias reside na regularidade com que o movimento ocorre.
- ❷ Enquanto as vibrações periódicas possuem uma estrutura repetitiva e previsível que facilita sua modelagem e controle, as vibrações aleatórias exigem abordagens estatísticas e experimentais para sua compreensão e gestão.
- ❸ O conhecimento dessas duas formas de vibração é fundamental para a engenharia, pois permite o desenvolvimento de estratégias adequadas para o monitoramento, a análise e a mitigação de vibrações, assegurando a integridade e o desempenho eficiente de sistemas mecânicos, civis e aeroespaciais.





- ✈ No contexto das vibrações mecânicas, o conceito de graus de liberdade é fundamental para a compreensão e a modelagem do comportamento dinâmico de um sistema.
- ✈ Graus de liberdade referem-se ao número mínimo de coordenadas independentes necessárias para descrever completamente a posição ou o estado de um sistema vibratório em qualquer instante de tempo.
- ✈ Cada grau de liberdade corresponde a uma possibilidade distinta de movimento, seja ele uma translação ou uma rotação, que o sistema pode realizar de maneira independente em relação aos demais movimentos.
- ✈ Os sistemas de um grau de liberdade, dois graus de liberdade e vários graus de liberdade são classificações fundamentais no estudo das vibrações mecânicas, baseadas no número de movimentos independentes necessários para descrever completamente o comportamento dinâmico de um sistema.

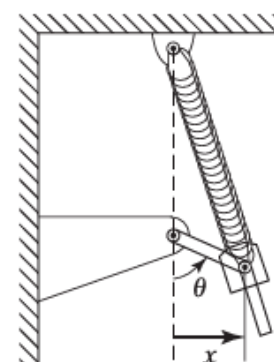
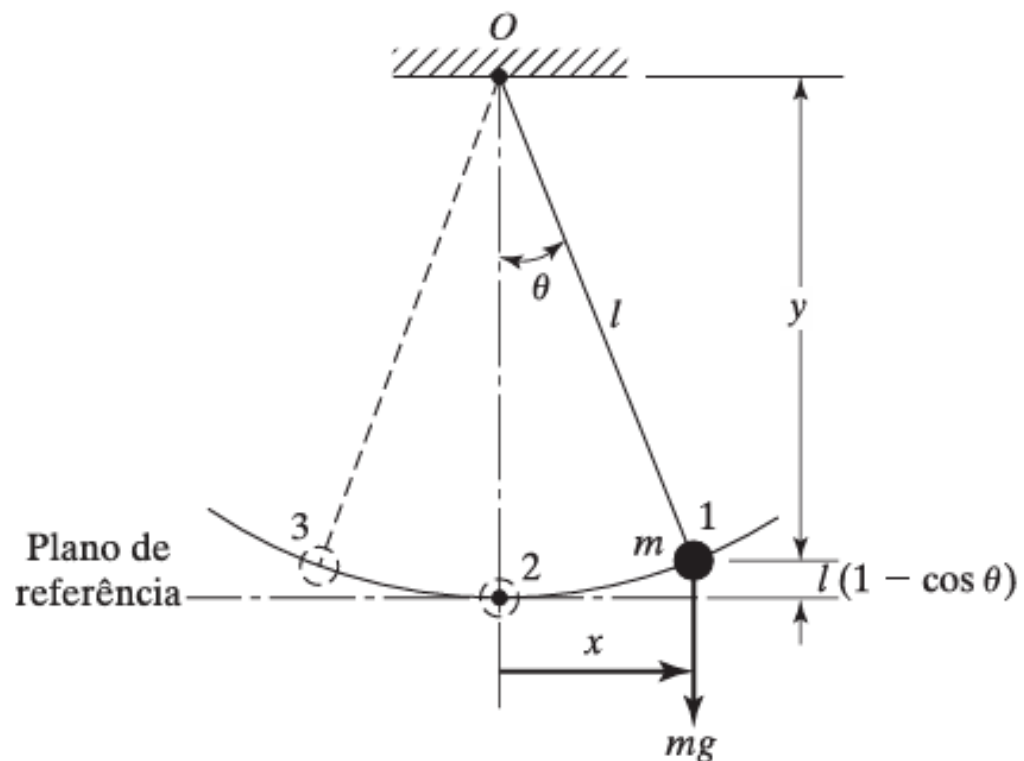


-  Um sistema de um grau de liberdade é aquele cuja posição ou estado vibratório pode ser descrito por meio de uma única coordenada independente.
-  Esse tipo de sistema é considerado o mais simples na análise de vibrações, sendo frequentemente utilizado como modelo introdutório para o entendimento dos conceitos básicos. Um exemplo clássico de sistema de um grau de liberdade é uma massa conectada a uma mola e a um amortecedor, que se move linearmente ao longo de uma única direção.
-  Nesse caso, a análise do movimento envolve a determinação da frequência natural, do amortecimento e da resposta a forças externas com base em uma única equação diferencial.

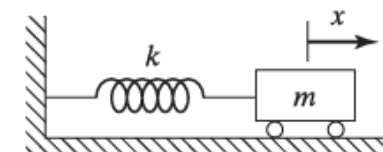


Sistemas com Um Grau de Liberdade

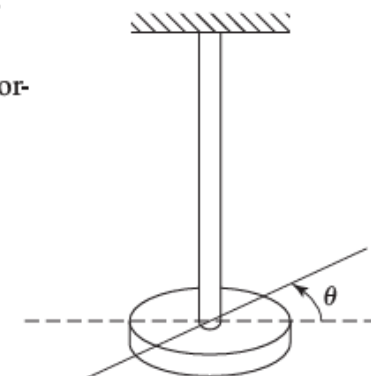
Aula 1



(a) Mecanismo cursor-manivela-mola



(b) Sistema massa-mola



(c) Sistema torcional



Sistemas com Dois Graus de Liberdade

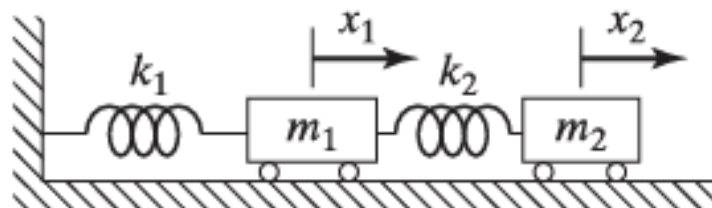
Aula 1

- ✈ Um sistema de dois graus de liberdade exige duas coordenadas independentes para descrever completamente seu comportamento dinâmico.
- ✈ Esse tipo de sistema pode surgir, por exemplo, quando duas massas estão conectadas entre si e ao solo por meio de molas e amortecedores, permitindo que ambas se movimentem de forma independente, embora interligadas.
- ✈ A interação entre os elementos do sistema de dois graus de liberdade resulta em um comportamento vibratório mais complexo, caracterizado por duas frequências naturais e dois modos de vibração distintos, cada um associado a uma combinação particular de movimentos das massas.
- ✈ A análise desses sistemas requer a formulação e a solução de um sistema de equações diferenciais acopladas, geralmente resolvidas com métodos matriciais ou técnicas de análise modal.

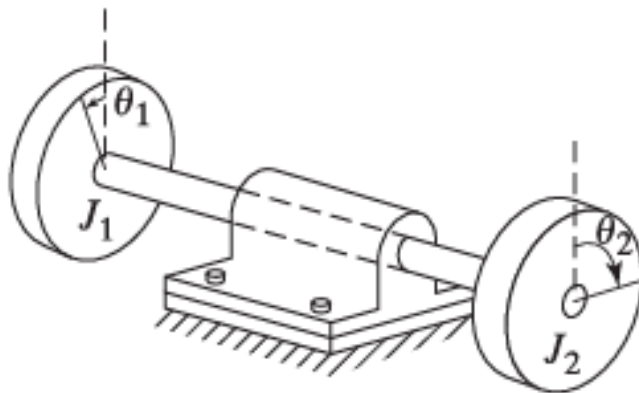


Sistemas com Dois Graus de Liberdade

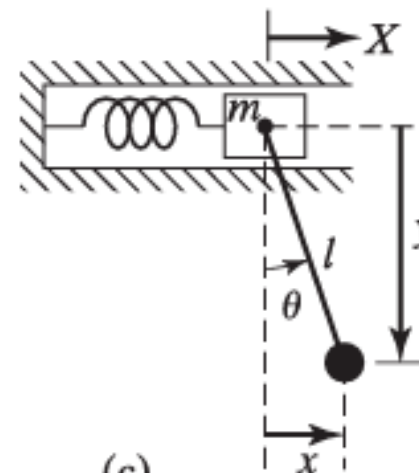
Aula 1



(a)



(b)



(c)



Sistemas com Vários Graus de Liberdade

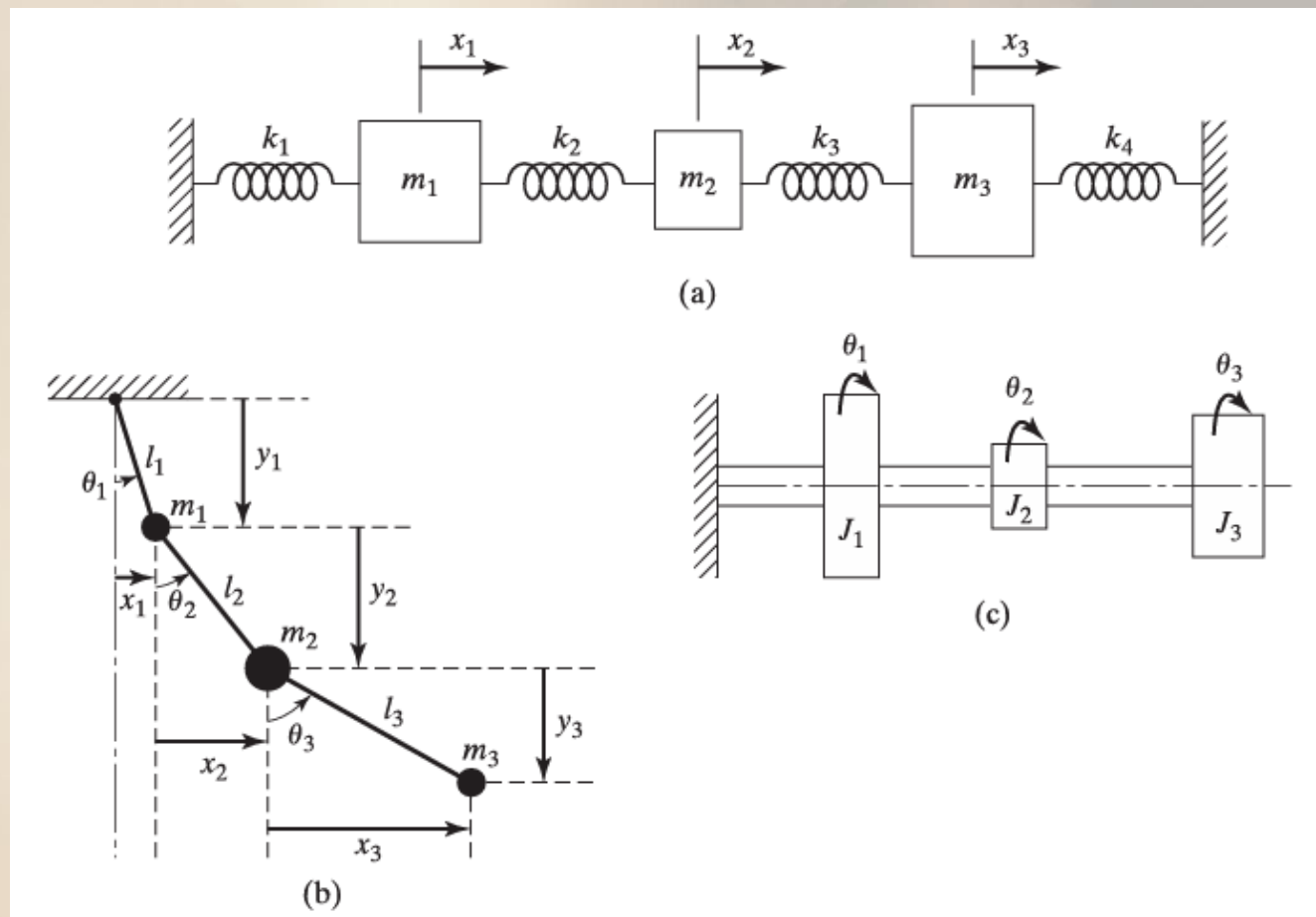
Aula 1

- Os sistemas de vários graus de liberdade são aqueles que necessitam de três ou mais coordenadas independentes para a completa descrição de seus movimentos.
- Esse tipo de sistema é típico em estruturas mais complexas, como pontes, edifícios, aeronaves e veículos, onde múltiplos pontos ou componentes podem se mover em diferentes direções ou realizar rotações.
- Quanto maior o número de graus de liberdade, mais sofisticada se torna a análise das vibrações, exigindo o uso de modelos matemáticos avançados, como matrizes de massa, rigidez e amortecimento, além de métodos computacionais para a solução das equações diferenciais associadas.
- Esses sistemas apresentam múltiplas frequências naturais e modos de vibração, cuja identificação e análise são essenciais para o projeto seguro e eficiente das estruturas, especialmente no que diz respeito à prevenção de fenômenos como a ressonância.



Sistemas com Vários Graus de Liberdade

Aula 1





- ✈ A classificação dos sistemas de vibração segundo o número de graus de liberdade é indispensável para a modelagem e a análise adequadas do comportamento dinâmico de diferentes estruturas e mecanismos.
- ✈ A compreensão dessa classificação permite aos engenheiros selecionar os métodos mais apropriados para prever as respostas vibratórias, identificar riscos e desenvolver soluções eficazes para o controle e a mitigação das vibrações indesejadas em uma ampla variedade de aplicações práticas.



Efeitos Positivos das Vibrações

Aula 1

-  Entre os aspectos positivos das vibrações, destaca-se a possibilidade de utilizar as vibrações de forma benéfica em diversos processos industriais e tecnológicos.
-  As vibrações são, por exemplo, fundamentais no funcionamento de peneiras vibratórias utilizadas na separação de materiais, em equipamentos de compactação de solo e concreto, bem como em sistemas de transporte vibratório, que movimentam produtos de forma eficiente e controlada.
-  Além disso, o estudo das vibrações permite o desenvolvimento de técnicas de monitoramento da integridade estrutural, como a análise de vibrações para a detecção precoce de falhas em máquinas rotativas, motores e estruturas, contribuindo significativamente para a segurança e a confiabilidade dos sistemas.



Efeitos Negativos das Vibrações

Aula 1

- Os sistemas vibratórios também apresentam aspectos negativos, especialmente quando as vibrações ocorrem de maneira indesejada ou excessiva.
- Vibrações não controladas podem provocar desconforto, reduzir a eficiência operacional e comprometer a vida útil de componentes e estruturas.
- Em máquinas e equipamentos, vibrações excessivas podem causar o afrouxamento de conexões, o desgaste prematuro de peças, a geração de ruídos indesejáveis e até mesmo falhas catastróficas.
- Em estruturas civis, como edifícios e pontes, vibrações excessivas podem prejudicar o conforto dos ocupantes e, em casos extremos, comprometer a estabilidade e a segurança.
- Além disso, a exposição prolongada de seres humanos a ambientes com vibração intensa pode acarretar problemas de saúde, como fadiga, lesões musculoesqueléticas e distúrbios neurossensoriais.



-  O desafio na engenharia consiste em equilibrar os aspectos positivos e negativos dos sistemas vibratórios, de modo a potencializar os benefícios e minimizar os riscos e prejuízos associados.
-  O desenvolvimento de soluções eficientes para o isolamento, a atenuação ou a absorção de vibrações indesejadas, bem como o aproveitamento controlado das vibrações úteis, depende do profundo conhecimento dos princípios que regem o comportamento dinâmico dos sistemas vibratórios.
-  Assim, a compreensão dos aspectos positivos e negativos das vibrações é essencial para garantir a segurança, a eficiência e a sustentabilidade das diversas aplicações tecnológicas e industriais que envolvem sistemas vibratórios.



Métodos de Análises de Vibrações

Aula 1

- ✈ A análise de vibrações é uma disciplina essencial na engenharia, utilizada para compreender, prever e controlar o comportamento dinâmico de sistemas mecânicos, estruturais e eletromecânicos.
- ✈ Diversos métodos são empregados nessa análise, variando desde abordagens teóricas e analíticas até técnicas experimentais e computacionais.
- ✈ A escolha do método adequado depende da complexidade do sistema, do objetivo do estudo e dos recursos disponíveis.
- ✈ Os métodos de análise de vibrações formam um conjunto de ferramentas indispensáveis na engenharia moderna.
- ✈ A correta aplicação dessas técnicas permite não apenas prever e mitigar os efeitos indesejáveis das vibrações, mas também explorar suas potencialidades de forma segura e eficiente, garantindo o desempenho, a durabilidade e a segurança das estruturas e equipamentos em uma ampla gama de aplicações industriais e tecnológicas.



- Os métodos analíticos são frequentemente aplicados em sistemas simples ou idealizados, como aqueles com um ou poucos graus de liberdade.
- Utilizando a formulação de equações diferenciais, é possível descrever o movimento vibratório do sistema e, a partir de soluções matemáticas, determinar parâmetros importantes como frequências naturais, modos de vibração e resposta a excitações externas.
- Essas soluções analíticas proporcionam uma compreensão clara dos mecanismos envolvidos e são fundamentais para o desenvolvimento de modelos conceituais e para a validação de outras abordagens mais complexas.



- ✈ Quando se trata de sistemas mais elaborados, com múltiplos graus de liberdade ou com geometrias e condições de contorno complexas, torna-se necessário o uso de métodos numéricos.
- ✈ Entre eles, destaca-se o Método dos Elementos Finitos (MEF), que consiste na discretização do sistema em pequenas partes ou elementos, cujas interações são descritas por equações matriciais.
- ✈ O MEF permite a análise detalhada do comportamento vibratório, mesmo em estruturas irregulares ou heterogêneas, e é amplamente utilizado na indústria aeroespacial, automobilística e na engenharia civil.
- ✈ Outros métodos numéricos importantes incluem o Método das Diferenças Finitas e o Método das Matrizes de Transferência, que também contribuem para a solução de problemas vibratórios complexos.



- ✈ Além dos métodos analíticos e numéricos, a análise experimental desempenha um papel crucial na investigação das vibrações.
- ✈ Técnicas experimentais como a análise modal experimental permitem a identificação direta das frequências naturais, modos de vibração e taxas de amortecimento de estruturas reais.
- ✈ Por meio da aplicação de excitações controladas, como impactos ou forças harmônicas, e da medição das respostas com acelerômetros, sensores de deslocamento ou velocímetros, é possível validar modelos teóricos e detectar falhas ou alterações no comportamento vibratório.
- ✈ A análise experimental é especialmente valiosa quando o sistema em estudo possui características difíceis de modelar ou quando há necessidade de monitoramento em campo.



- 🌐 O avanço tecnológico propiciou o desenvolvimento de ferramentas computacionais sofisticadas, que integram métodos numéricos com simulações em ambiente virtual, possibilitando análises rápidas e precisas.
- 🌐 Softwares especializados permitem a realização de análises modais, espectrais e transitórias, fornecendo informações detalhadas sobre o desempenho vibratório de sistemas sob diferentes condições operacionais.

Obrigado Pela Atenção

Nos Encontramos na Próxima Aula





Aula - 2

Modelagem de um Sistema Vibratório



Conteúdos Abordados Nessa Aula

Aula 2

 Monitoramento e Medições de Vibrações;

 Modelagem de Sistemas Vibratórios.



Monitoramento e Medição de Vibrações

Aula 2

- 🌐 Na indústria, o monitoramento e a medição de vibrações são atividades essenciais para garantir a segurança, a eficiência e a longevidade de máquinas, equipamentos e estruturas.
- 🌐 Para isso, diversas técnicas especializadas são utilizadas, combinando instrumentos de alta precisão, métodos analíticos e sistemas automatizados de coleta e interpretação de dados.
- 🌐 Entre as principais técnicas, destaca-se o uso de sensores específicos, como acelerômetros, velocímetros e transdutores de deslocamento, que convertem grandezas mecânicas, como aceleração, velocidade e deslocamento, em sinais elétricos passíveis de análise.
- 🌐 Esses sensores são estrategicamente posicionados em pontos críticos dos equipamentos ou estruturas, de modo a capturar informações representativas sobre o comportamento vibratório em diferentes condições de operação.



Monitoramento e Medição de Vibrações

Aula 2

- 🌐 As técnicas utilizadas na indústria para o monitoramento e medição de vibrações são fundamentais para assegurar a integridade, a segurança e a eficiência de sistemas mecânicos e estruturais.
- 🌐 A combinação de métodos tradicionais e tecnologias avançadas permite uma abordagem abrangente e eficaz para a gestão das vibrações, contribuindo para a otimização dos processos produtivos, a redução de custos operacionais e o aumento da competitividade industrial.
- 🌐 A indústria também emprega sistemas de monitoramento contínuo baseados em tecnologias digitais e redes de sensores inteligentes, que permitem a coleta automatizada de dados em tempo real, o armazenamento em bancos de dados e a aplicação de algoritmos de diagnóstico e prognóstico.
- 🌐 Esses sistemas são frequentemente integrados a plataformas de manutenção preditiva e gestão de ativos, utilizando recursos de inteligência artificial e aprendizado de máquina para detectar padrões anômalos e antecipar falhas com elevada precisão.



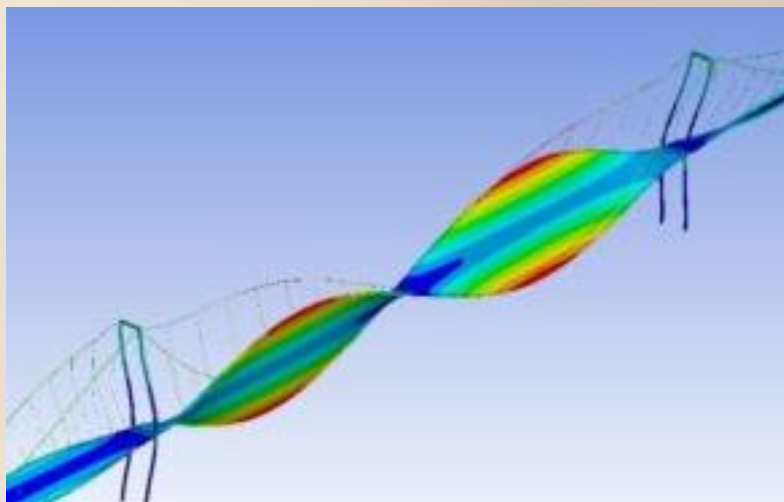
- 🌐 Uma técnica amplamente empregada é a análise espectral, realizada por meio da Transformada Rápida de Fourier (FFT), que permite decompor os sinais de vibração em suas componentes de frequência.
- 🌐 Com isso, é possível identificar frequências características associadas a falhas mecânicas, como desalinhamentos, desbalanceamentos, folgas, desgaste de rolamentos e engrenagens danificadas.
- 🌐 A análise espectral é fundamental para a manutenção preditiva, pois possibilita detectar precocemente anomalias e programar intervenções corretivas antes que ocorram falhas catastróficas, reduzindo custos e aumentando a confiabilidade operacional.
- 🌐 Outra técnica é a análise de vibração no domínio do tempo consiste na observação direta dos sinais de vibração ao longo do tempo, permitindo avaliar transientes, impactos ou comportamentos não estacionários que nem sempre são evidentes na análise em frequência.



Monitoramento e Medição de Vibrações

Aula 2

- 🌐 Técnicas mais avançadas incluem a análise modal experimental, que visa determinar os modos de vibração naturais de uma estrutura, suas frequências e seus fatores de amortecimento, por meio da aplicação controlada de excitações e da medição das respostas vibratórias.
- 🌐 Esse tipo de análise é essencial no desenvolvimento e validação de projetos estruturais, bem como na identificação de alterações que possam indicar degradação ou danos.





Ensaio de “Crash Test” em um Automóvel

Aula 2

-  O ensaio de “crash test” em um automóvel é um procedimento fundamental para avaliar o comportamento estrutural e a segurança dos veículos em situações de colisão, e para isso são utilizadas diversas técnicas de medição de vibrações e de monitoramento dinâmico.
-  Durante esse tipo de ensaio, o objetivo principal é obter dados precisos sobre as forças, deslocamentos, acelerações e deformações que ocorrem em diferentes partes do veículo e em seus ocupantes simulados, permitindo assim analisar a eficiência dos sistemas de proteção e a integridade estrutural.
-  A medição de vibrações desempenha um papel central nesse contexto, pois possibilita entender como as diferentes partes do veículo respondem às cargas extremas e repentinas geradas pela colisão.



Técnicas Utilizadas no Ensaio de “Crash Test”

Aula 2

- Entre as principais técnicas utilizadas, destaca-se o uso de acelerômetros triaxiais de alta frequência, que são instalados em pontos estratégicos do veículo, como chassi, colunas estruturais, sistema de suspensão, além de nos bonecos antropomórficos que simulam os ocupantes.
- Esses sensores medem as acelerações nas três direções do espaço, fornecendo informações detalhadas sobre os picos de carga e os modos de vibração que ocorrem no momento do impacto.
- A análise desses sinais permite identificar como a energia do choque é dissipada pela estrutura do veículo e como essa resposta influencia na segurança dos ocupantes.



Técnicas Utilizadas no Ensaio de “Crash Test”

Aula 2

- ✈ Além dos acelerômetros, são utilizados extensômetros e sensores de deformação que monitoram o alongamento ou compressão de elementos estruturais críticos, registrando o comportamento dinâmico das zonas de deformação programadas.
- ✈ Esses dados são essenciais para verificar se as partes do veículo destinadas a absorver energia de impacto funcionam conforme o projetado, evitando a transferência excessiva de forças para o habitáculo dos passageiros.
- ✈ Também são empregados sensores de deslocamento e velocímetros para medir, respectivamente, os movimentos relativos entre diferentes partes do veículo e as velocidades atingidas antes, durante e após a colisão, garantindo uma avaliação completa da dinâmica do evento.



Técnicas Utilizadas no Ensaio de “Crash Test”

Aula 2

- 🌐 As técnicas de medição incluem ainda a utilização de sistemas ópticos de alta velocidade e câmeras que capturam milhares de quadros por segundo, permitindo uma análise visual detalhada das deformações e das vibrações em tempo real.
- 🌐 Esses registros visuais são complementares aos dados dos sensores, oferecendo uma visão global da sequência dos eventos e possibilitando a correlação precisa entre os parâmetros medidos e os efeitos físicos observados.
- 🌐 Em muitos casos, técnicas de correlação de imagens digitais são aplicadas sobre essas imagens para medir campos de deslocamento e deformação superficial com alta precisão.



Ensaio de “Crash Test”

Aula 2





Tratamento dos Dados no Ensaio de “Crash Test”

Aula 2

-  O tratamento dos dados obtidos envolve métodos avançados de análise no domínio do tempo e da frequência, como a Transformada de Fourier, para identificar os modos de vibração que surgem em decorrência do impacto e sua relação com as frequências naturais das estruturas veiculares.
-  A interpretação desses resultados é fundamental para validar modelos computacionais de simulação de “crash test”, que, por sua vez, orientam o desenvolvimento de veículos mais seguros.
-  As técnicas de medição de vibrações aplicadas ao ensaio de “crash test” são complexas, integradas e de alta precisão, combinando sensores mecânicos, ópticos e eletrônicos para fornecer uma caracterização completa da resposta dinâmica do automóvel em situações críticas.
-  Essas técnicas são indispensáveis para o aprimoramento dos projetos automotivos, contribuindo para a redução de lesões e fatalidades no trânsito, bem como para o atendimento aos rigorosos padrões internacionais de segurança veicular.



Modelagem Esquemática e Matemática

Aula 2

-  A modelagem esquemática e matemática de um sistema vibratório tem como finalidade fundamental representar, de maneira simplificada e precisa, o comportamento dinâmico de um sistema real, possibilitando sua análise, compreensão e controle.
-  A principal finalidade dessa modelagem é, portanto, prever o comportamento do sistema sob diversas condições operacionais, permitindo antecipar e mitigar problemas relacionados a vibrações indesejadas, como ressonância, fadiga estrutural e desconforto.
-  Além disso, a modelagem possibilita otimizar o projeto de componentes e sistemas, promovendo a eficiência, a segurança e a durabilidade.
-  Em muitos casos, a modelagem matemática serve como base para o desenvolvimento de sistemas de controle ativo ou passivo de vibrações, que visam reduzir ou eliminar efeitos prejudiciais.



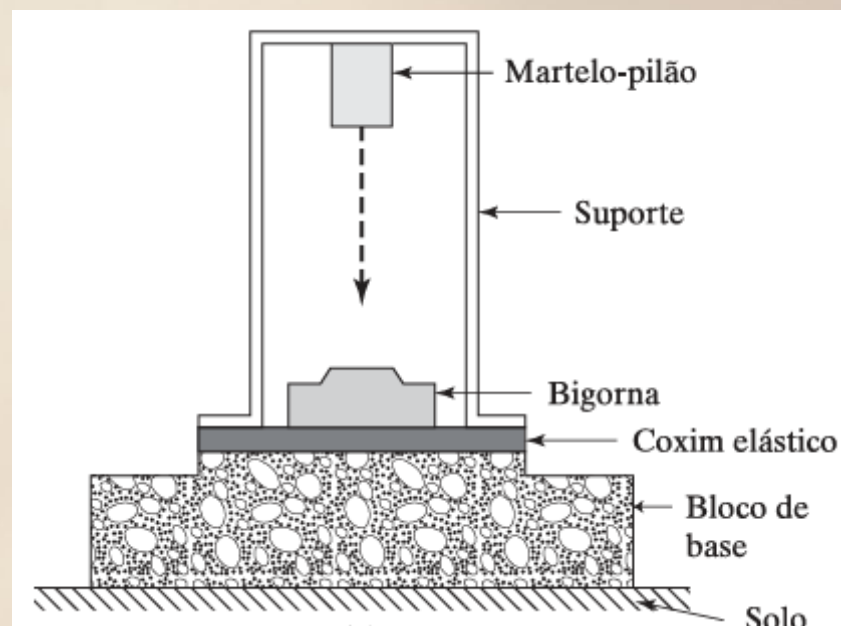
- ✈ Através da modelagem esquemática, identifica-se e seleciona-se os componentes mais relevantes do sistema, como massas, molas, amortecedores e pontos de aplicação de forças, transformando um conjunto físico complexo em um diagrama idealizado que capta suas principais características dinâmicas.
- ✈ Essa simplificação é essencial para que o problema se torne tratável do ponto de vista analítico ou computacional, eliminando detalhes irrelevantes que não afetam significativamente o comportamento vibratório global.



Exemplo de Aplicação

Aula 2

- 🌐 O martelo de forjar consiste em um suporte, um martelo de queda conhecido como pilão, uma bigorna e um bloco de base. A bigorna é um bloco maciço de aço no qual o material é forjado até a forma desejada pelos golpes repetidos do pilão. A bigorna normalmente é montada sobre um coxim elástico para reduzir a transmissão de vibração para o bloco de base e suporte. Considerando o modelo mostrado na figura, realize a modelagem esquemática do sistema vibratório.

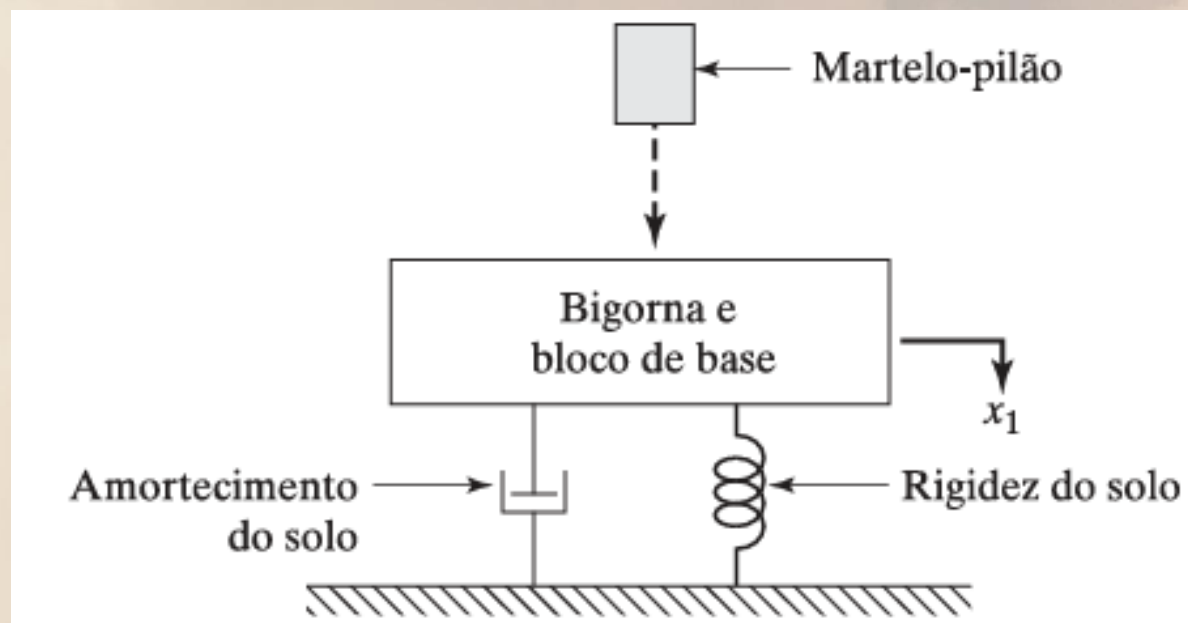
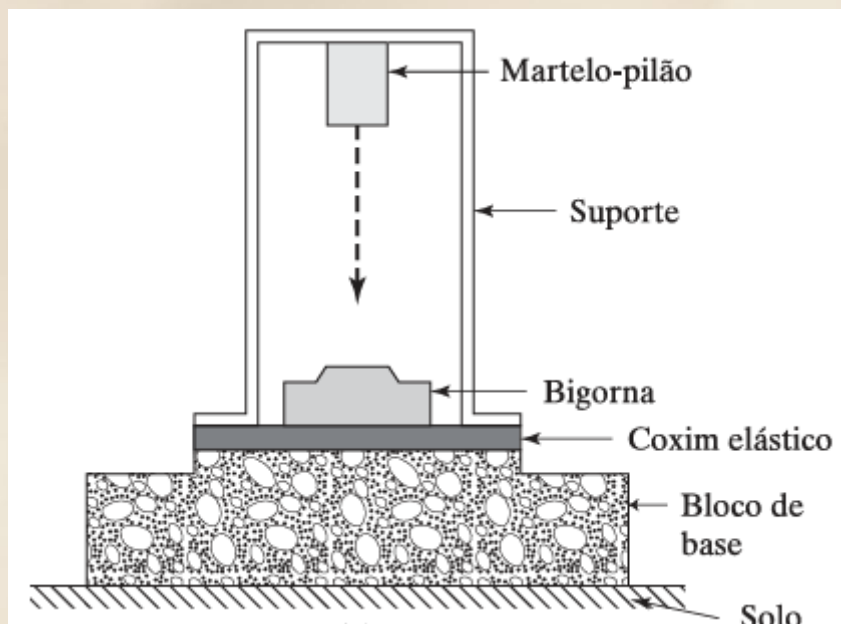




Solução do Exemplo

Aula 2

- Para uma primeira aproximação, suporte, bigorna, coxim, bloco de base e solo são modelados como um sistema com um único grau de liberdade, como mostrado na figura.

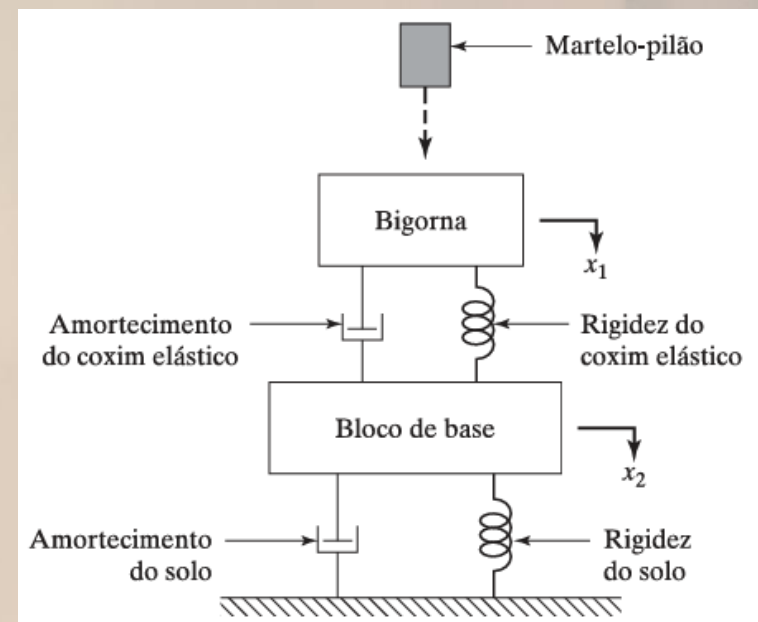
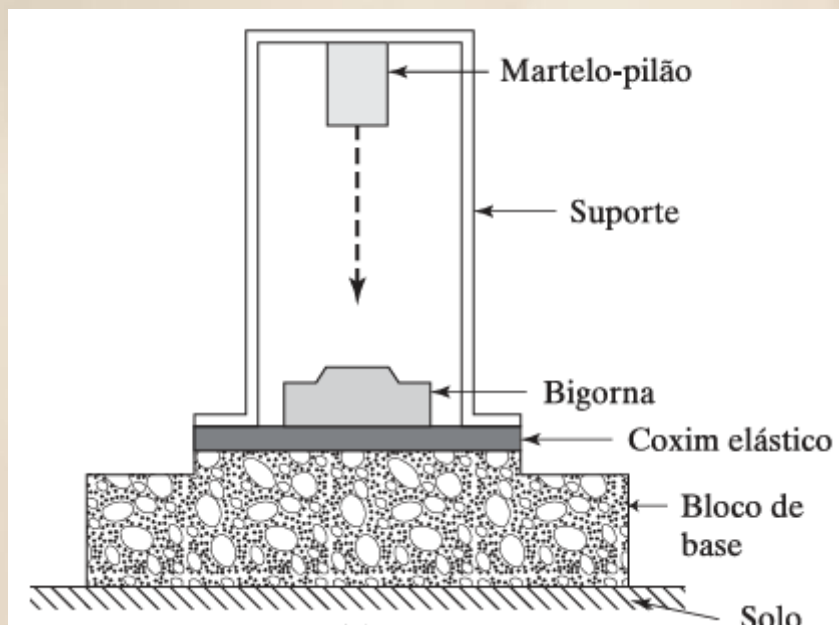




Solução do Exemplo

Aula 2

- Para refinar a aproximação, os pesos do suporte e da bigorna e o peso do bloco de base são representados separadamente por um modelo com dois graus de liberdade, como mostrado na figura.

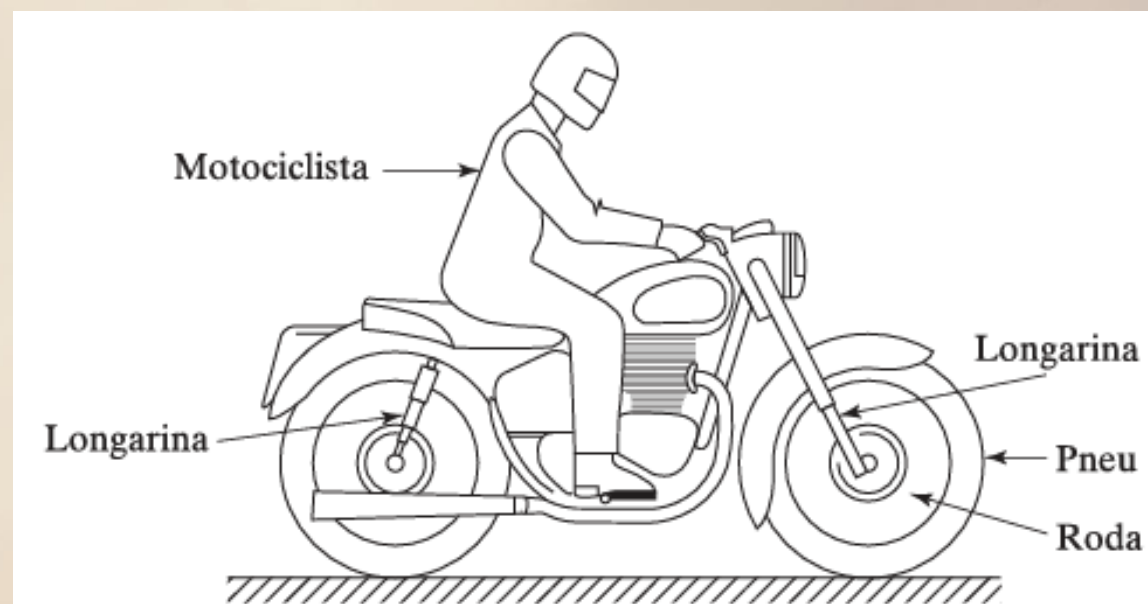




Exemplo de Aplicação

Aula 2

- ✈ A figura mostra uma motocicleta com um motociclista. Desenvolva uma sequência de três modelos esquemáticos para do sistema para investigar vibrações no sentido vertical. Considere a elasticidade dos pneus, a elasticidade e o amortecimento das longarinas (no sentido vertical), as massas das rodas e a elasticidade, amortecimento e massa do motociclista.

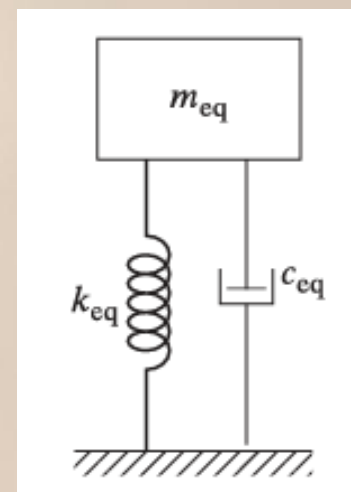
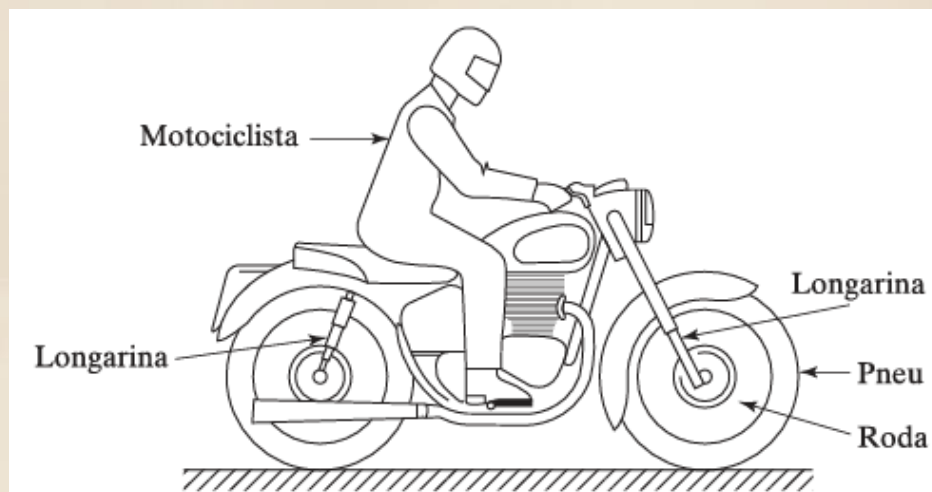




Solução do Exemplo

Aula 2

- 🌐 Começamos com o modelo mais simples e o refinamos gradativamente. Quando são usados os valores equivalentes de massa, rigidez e amortecimento do sistema obtemos um modelo de um único grau de liberdade como mostrado na figura. Nesse modelo, a rigidez equivalente (k_{eq}) inclui a rigidez dos pneus, longarinas e motociclista. A constante de amortecimento equivalente (c_{eq}) engloba o amortecimento das longarinas e do motociclista. A massa equivalente (m_{eq}) abrange as massas das rodas, do corpo do veículo e do motociclista.



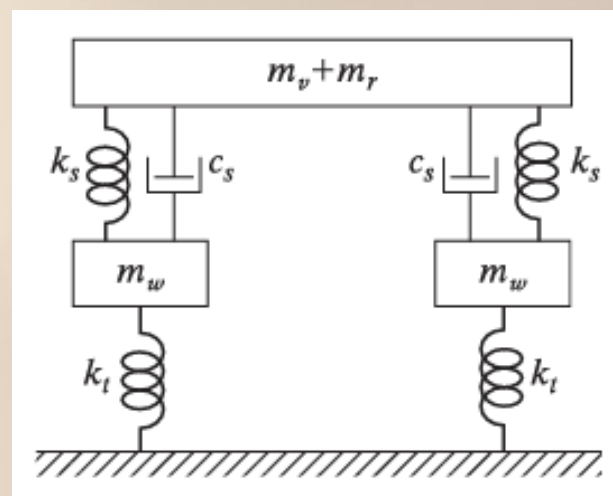
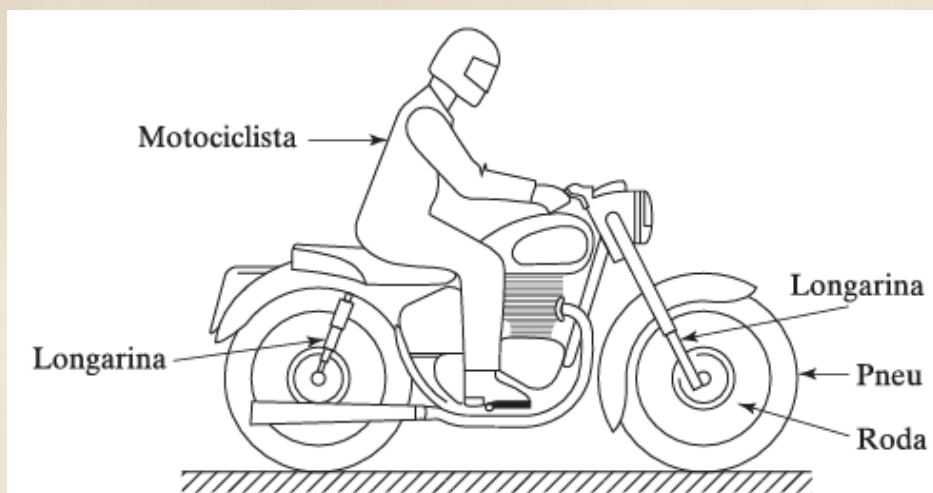
Índices	
t : pneu	v : veículo
w : roda	r : motociclista
s : longarina	eq : equivalente



Solução do Exemplo

Aula 2

- ✈ O modelo anterior pode ser refinado representando as massas das rodas, a elasticidade dos pneus e a elasticidade e amortecimento das longarinas em separado, como mostrado na figura. Nesse modelo, a massa do corpo do veículo (m_v) e a massa do motociclista (m_r) são mostradas como uma massa única, $m_v + m_r$.



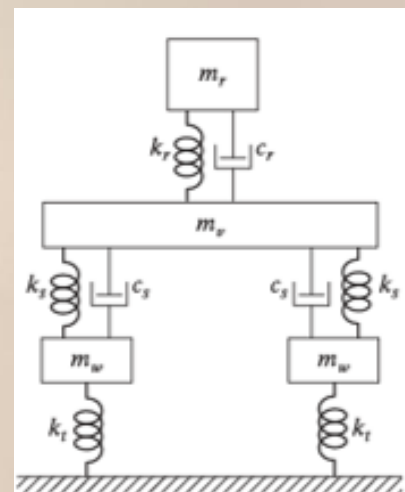
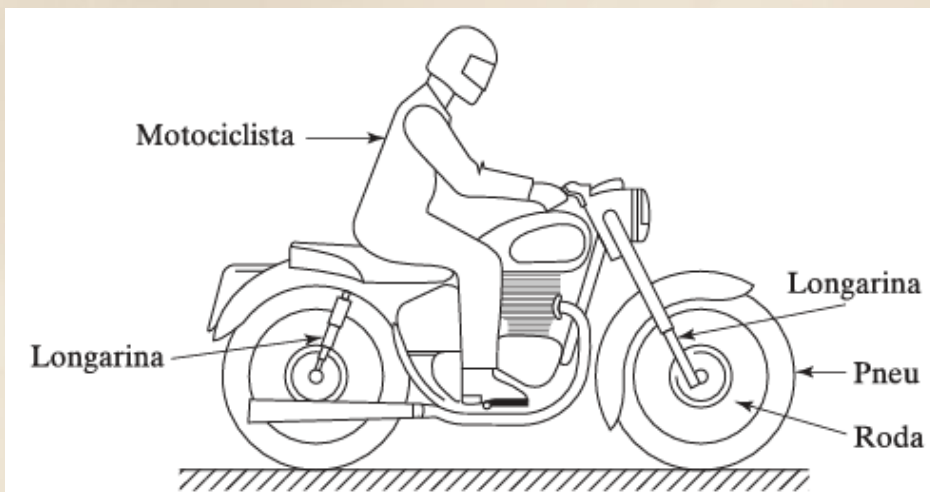
Índices	
t : pneu	v : veículo
w : roda	r : motociclista
s : longarina	eq : equivalente



Solução do Exemplo

Aula 2

- ✈ No modelo anterior quando são consideradas a elasticidade (como a constante elástica k_r) e o amortecimento (como constante de amortecimento c_r) do motociclista, o modelo pode ser refinado novamente como mostrado na figura.



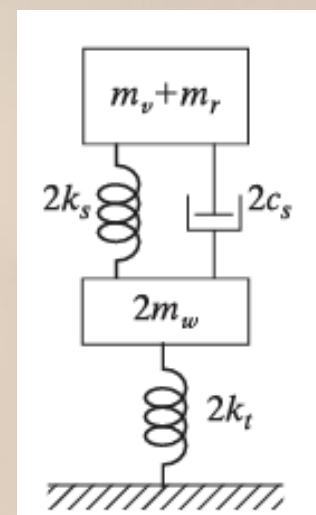
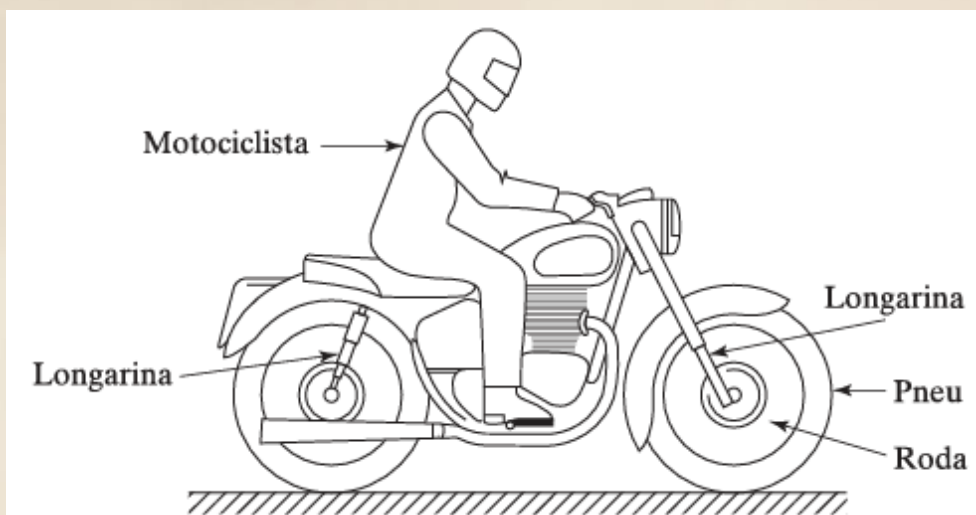
Índices	
t : pneu	v : veículo
w : roda	r : motociclista
s : longarina	eq : equivalente



Solução do Exemplo

Aula 2

- Observe que os modelos apresentados anteriormente não são únicos. Por exemplo, combinando as constantes elásticas de ambos os pneus, as massas de ambas as rodas e as constantes elásticas e de amortecimento de ambas as longarinas como quantidades únicas, obtém-se o modelo mostrado na figura.



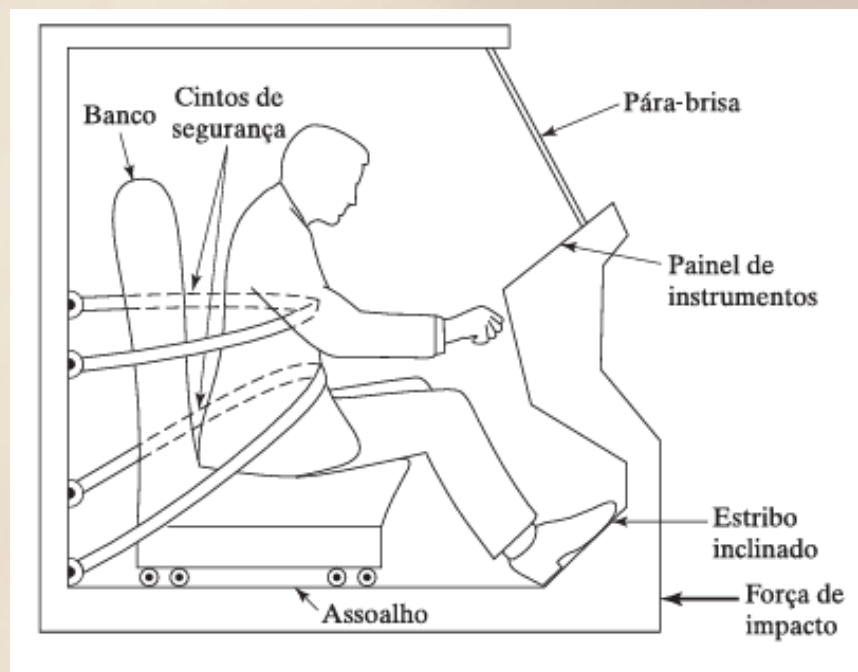
Índices	
t : pneu	v : veículo
w : roda	r : motociclista
s : longarina	eq : equivalente



Exercícios Propostos

Aula 2

1. A figura mostra um corpo humano e um sistema de cintos de segurança no momento da colisão de um veículo. Sugira um modelo esquemático simples considerando a elasticidade, massa e amortecimento do banco, do corpo humano e do sistema de cintos de segurança para uma análise de vibrações do sistema.

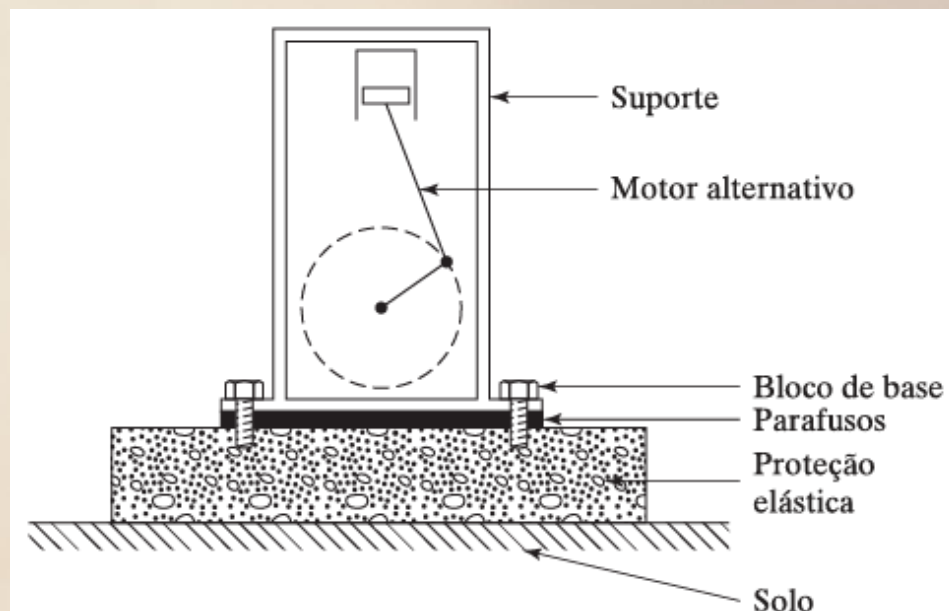




Exercícios Propostos

Aula 2

2. Um motor alternativo está montado sobre uma base como mostrado na figura. As forças e momentos de desbalanceamentos desenvolvidos no motor são transmitidos ao suporte e à base. Uma proteção elástica é colocada entre o motor e o bloco da base para reduzir a transmissão da vibração. Desenvolva dois modelos esquemáticos do sistema usando um refinamento gradual do processo de modelagem.

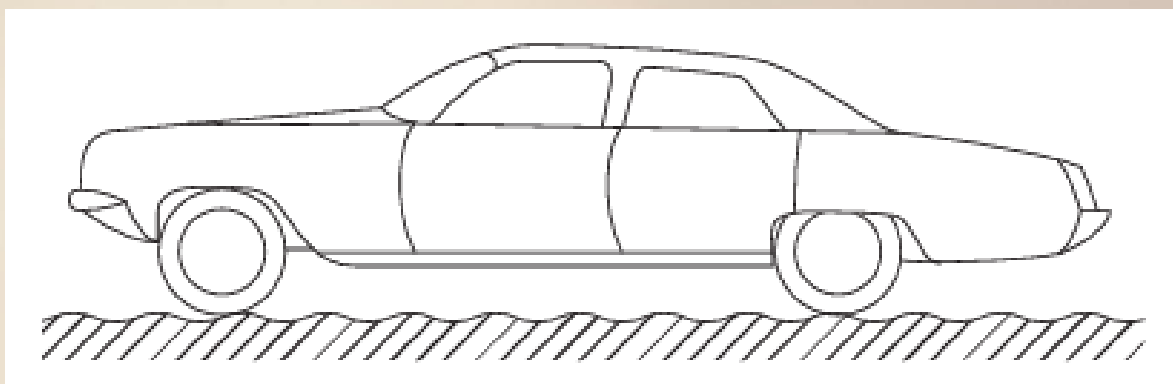




Exercícios Propostos

Aula 2

3. Um automóvel que trafega por uma estrada em mau estado pode ser modelado considerando: (a) peso da carroceria, passageiros, bancos, rodas da frente e rodas traseiras; (b) elasticidade dos pneus (suspensão), molas principais e bancos; (c) amortecimento dos bancos, absorvedores de choque e pneus. Desenvolva os três modelos esquemáticos dessas situações utilizando um refinamento gradual no processo de modelagem.

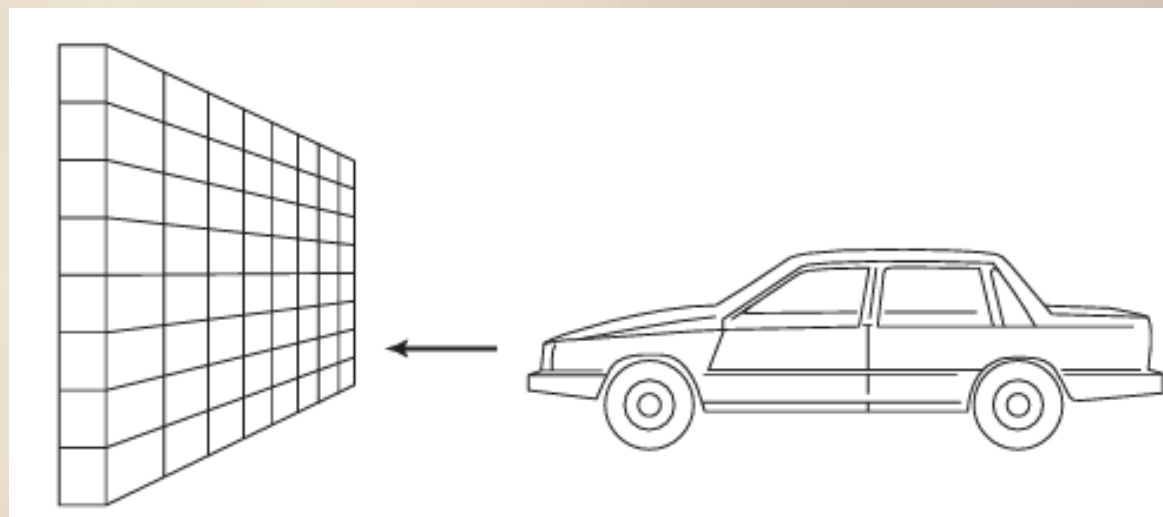




Exercícios Propostos

Aula 2

4. As consequências de uma colisão frontal entre dois automóveis podem ser estudadas considerando o impacto do automóvel contra uma barreira (crash test) como mostra a figura. Construa um modelo esquemático considerando as massas da carroceria do automóvel, motor, transmissão e suspensão e a elasticidade dos para-choques, radiador, carroceria em chapas metálicas, sistema de transmissão e suportes do motor.

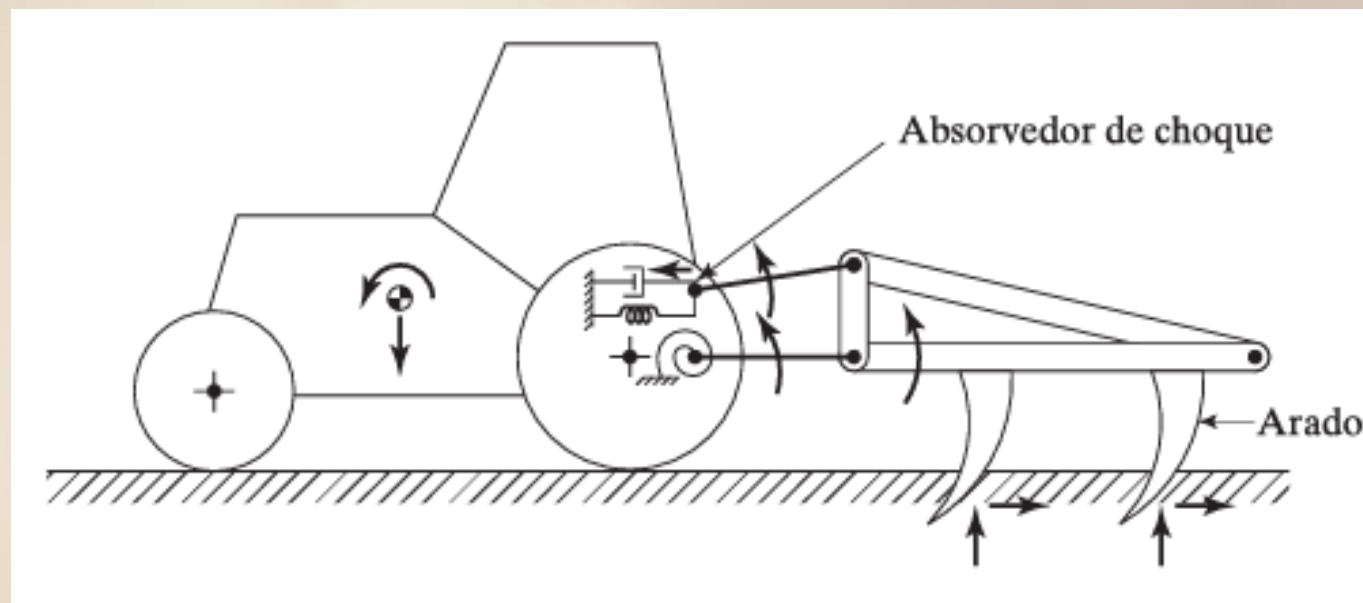




Exercícios Propostos

Aula 2

5. Desenvolva um modelo esquemático para o trator e arado mostrados na figura. Considere na análise massa, elasticidade amortecimento dos pneus, absorvedores de choque e arado (lâminas).



Obrigado Pela Atenção

Nos Encontramos na Próxima Aula





Aula - 3

Elementos de Molas



Conteúdos Abordados Nessa Aula

Aula 3

 Elementos de Molas;

 Associação de Molas.



Definição de Mola Linear

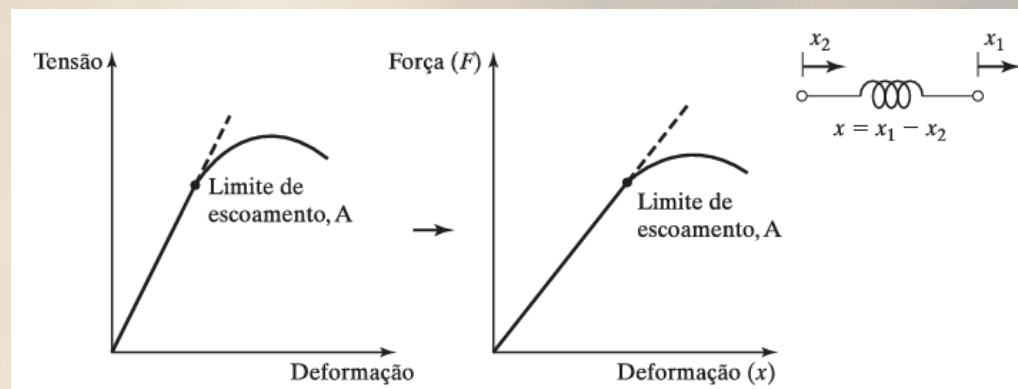
Aula 3

- ☉ Uma mola linear é um elemento mecânico que possui a propriedade de deformar-se elasticamente quando submetida a uma força e, após a remoção dessa força, tende a retornar à sua configuração original.
- ☉ A principal característica de uma mola linear é que a força exercida por ela é diretamente proporcional à deformação sofrida, obedecendo à chamada Lei de Hooke.
- ☉ Essa relação linear é válida dentro dos limites elásticos do material que constitui a mola, isto é, enquanto a deformação não ultrapassar o ponto em que ocorrem alterações permanentes na estrutura do material.



Deformação de uma Mola Linear

Aula 3



- De acordo com a Lei de Hooke, a força F exercida por uma mola linear é diretamente proporcional ao seu alongamento ou compressão x , medido em relação à sua posição de equilíbrio, e o equacionamento dessa força é expresso por:

$$F = k \cdot x$$

- A constante k depende das propriedades do material e da geometria da mola, e determina o quão resistente a mola é à deformação, ou seja, quanto maior o valor de k , maior será a força necessária para provocar um determinado deslocamento.



Trabalho Realizado pela Força da Mola

Aula 3

- 🌐 O trabalho realizado pela força da mola ao longo de uma deformação também pode ser determinado a partir dessa relação fundamental.
- 🌐 Considerando que a força varia linearmente com o deslocamento, o cálculo do trabalho U realizado pela mola quando ela é deformada de uma posição inicial $x = 0$ até uma posição final x corresponde à área sob o gráfico da força em função do deslocamento, que possui a forma de um triângulo.
- 🌐 Assim, o trabalho realizado pode ser obtido pela integral da força em relação ao deslocamento, resultando na expressão:

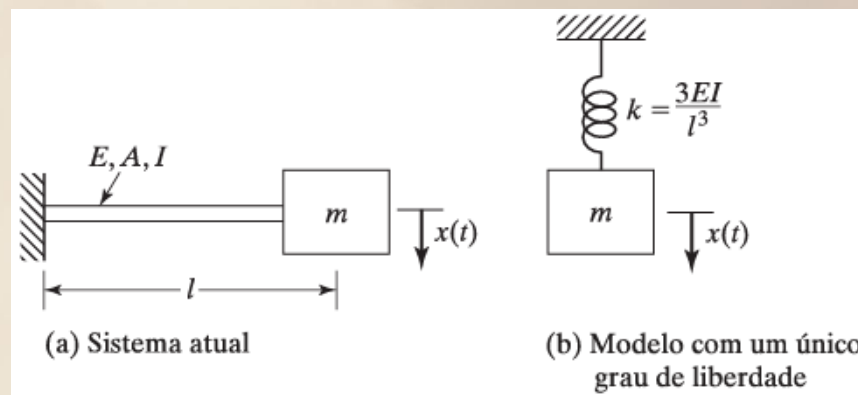
$$U = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$



Analogia da Mola com Elementos Elásticos

Aula 3

- Elementos elásticos como vigas também se comportam como molas.
- Por exemplo, considere a viga em balanço com uma massa m em sua extremidade conforme mostrado na figura.



- Pela Resistência dos Materiais, sabe-se que a deflexão estática da extremidade livre da viga é dada por:

$$\delta_{st} = \frac{W \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I}$$



Analogia da Mola com Elementos Elásticos

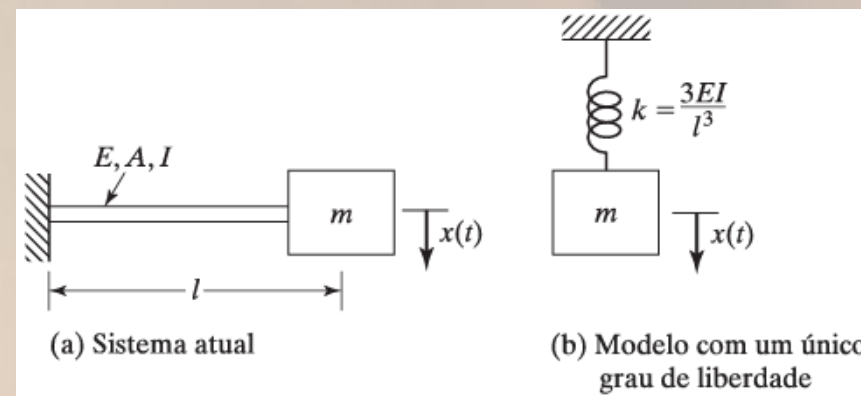
Aula 3

Relacionando com a equação da mola, pode-se escrever que:

$$F = k \cdot x \quad \rightarrow \quad k = \frac{F}{x} = \frac{W}{\delta_{st}}$$

$$k = \frac{W}{\frac{W \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I}}$$

$$k = \frac{3 \cdot E \cdot I \cdot W}{W \cdot l^3} \quad \rightarrow \quad k = \frac{3 \cdot E \cdot I}{l^3}$$



W = Peso da massa m ;
 E = Módulo de Elasticidade;
 I = Momento de Inércia da Seção Transversal da Viga.



- As técnicas de associação de molas na análise de vibrações mecânicas são fundamentais para modelar e compreender o comportamento de sistemas elásticos compostos, nos quais múltiplas molas atuam simultaneamente para resistir a forças aplicadas.
- A associação de molas pode ocorrer de duas formas básicas: em série ou em paralelo, e cada uma dessas configurações resulta em diferentes características dinâmicas que afetam diretamente a rigidez total do sistema e, conseqüentemente, sua resposta vibratória.
- A escolha da configuração e o cálculo da rigidez equivalente são etapas essenciais na simplificação de sistemas reais, permitindo que modelos complexos sejam analisados de maneira mais eficiente por meio de métodos matemáticos.



Associação em Série

Aula 3

- Na associação em série, duas ou mais molas são conectadas de modo que a força aplicada atue sucessivamente sobre cada uma delas, resultando em um deslocamento total que é a soma dos deslocamentos individuais de cada mola.
- Nesse caso, a rigidez equivalente k_{eq} do sistema é calculada a partir da inversa da soma das inversas das rigidezes individuais, seguindo a expressão:

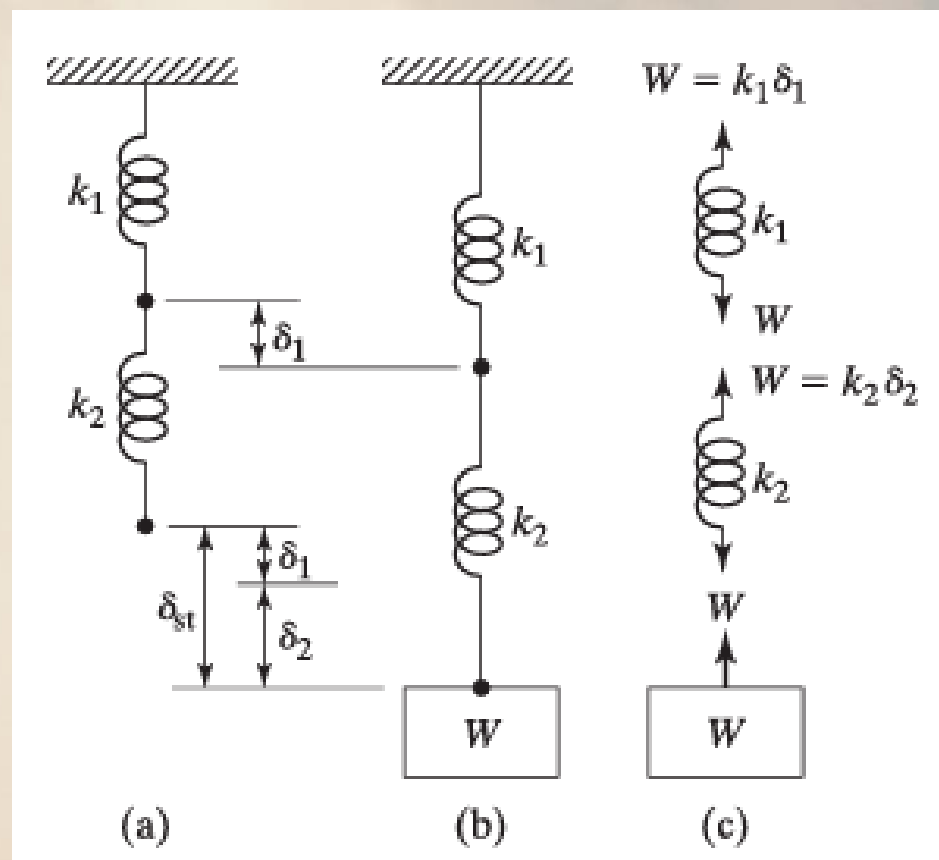
$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \dots + \frac{1}{k_n}$$

- Essa configuração resulta em uma rigidez equivalente inferior à menor rigidez entre as molas associadas, tornando o sistema mais flexível e, conseqüentemente, mais suscetível a deslocamentos maiores sob uma mesma força aplicada.
- Esse tipo de associação é comumente encontrado em sistemas onde a distribuição da deformação ou o isolamento de vibrações é desejado.



Associação em Série

Aula 3





Associação em Paralelo

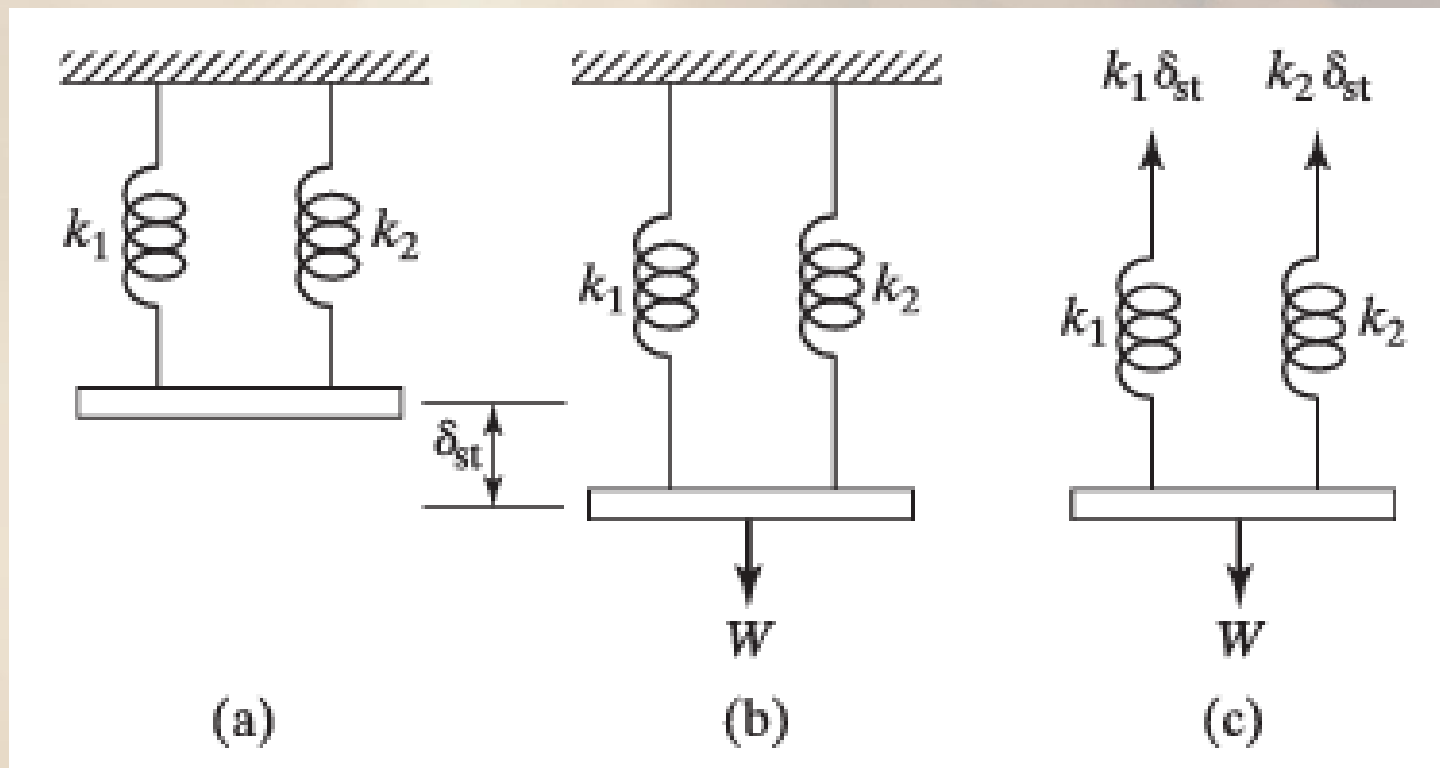
Aula 3

- Na associação em paralelo, as molas são dispostas de modo que todas se deformem simultaneamente sob a ação da mesma força, dividindo essa carga entre si.
- O deslocamento é igual para todas as molas, mas a força total aplicada é a soma das forças resistidas por cada mola.
- A rigidez equivalente neste caso é obtida por meio da soma direta das rigidezes individuais, ou seja:
$$k_{eq} = k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n$$
- Assim, a associação em paralelo resulta em um sistema mais rígido do que qualquer uma das molas isoladas, reduzindo os deslocamentos sob uma mesma carga.
- Esse tipo de configuração é frequentemente utilizado quando se busca reforçar a estrutura ou aumentar a capacidade de suporte de carga sem comprometer a estabilidade vibratória.



Associação em Paralelo

Aula 3

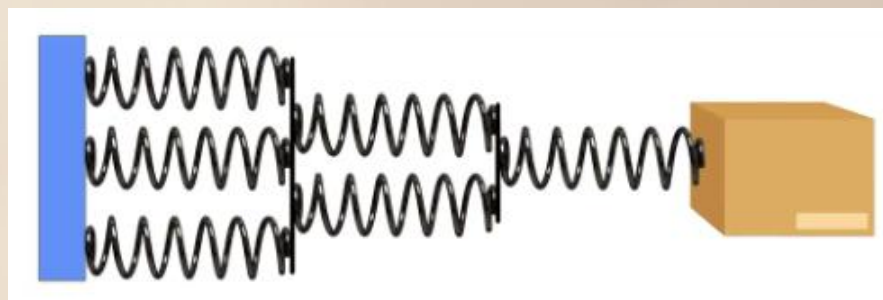




Associação Mista de Molas

Aula 3

- ✈ Além das associações puras, muitos sistemas mecânicos envolvem combinações mistas de molas em série e em paralelo, exigindo um tratamento analítico mais elaborado para a determinação da rigidez equivalente.
- ✈ Nesse contexto, a aplicação sistemática das técnicas de associação permite decompor o sistema complexo em subsistemas mais simples, cuja rigidez pode ser calculada de forma sequencial e organizada.
- ✈ Portanto, as técnicas de associação de molas são ferramentas fundamentais na engenharia de vibrações, proporcionando uma base teórica sólida para o desenvolvimento de modelos precisos e para a elaboração de soluções eficientes em diversas aplicações industriais e estruturais.





Compreensão das Técnicas de Associação

Aula 3

- 🌐 O entendimento dessas técnicas de associação é indispensável para a análise de sistemas vibratórios, especialmente na determinação das frequências naturais e dos modos de vibração.
- 🌐 A rigidez do sistema, diretamente influenciada pela associação das molas, afeta a frequência natural segundo a relação mostrada na equação a seguir. Onde m é a massa associada ao sistema.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}}$$

- 🌐 Assim, a escolha adequada entre associações em série ou em paralelo permite o ajuste fino das características dinâmicas do sistema, viabilizando o projeto de estruturas e mecanismos que operem de forma segura, eficiente e conforme os requisitos específicos de desempenho vibratório.



Exemplo Prático – Molas Ferroviárias

Aula 3

- 🌐 As molas são componentes fundamentais para garantir a segurança e estabilidade dos trens em movimento.
- 🌐 Elas são responsáveis por absorver choques, manter a estabilidade em alta velocidade e reduzir a vibração dos vagões.
- 🌐 As molas ferroviárias possuem uma grande capacidade de carga e durabilidade, e por isso são utilizadas em larga escala nos sistemas ferroviários.
- 🌐 Os trens, em geral, possuem dois tipos de molas: as molas helicoidais e as molas planas.
- 🌐 As molas helicoidais, como o próprio nome indica, possuem um formato espiral e são comumente utilizadas na suspensão dos vagões.
- 🌐 Já as molas planas são utilizadas em outras partes do trem, como nos freios e nos truques.



Associação de Molas Ferroviárias

Aula 3





-  O feixe de molas utilizado em caminhões e veículos pesados configura-se, do ponto de vista mecânico, como um sistema de associação de molas em paralelo.
-  Esse tipo de associação ocorre porque as lâminas metálicas que compõem o feixe são dispostas uma sobre a outra, de modo que, quando o feixe é submetido a uma carga, todas as lâminas sofrem deformações simultâneas, compartilhando o esforço de sustentação e absorção das forças aplicadas.
-  A deformação ocorre de maneira semelhante em cada lâmina, respeitando as características geométricas e materiais individuais, mas contribuindo conjuntamente para a rigidez global do sistema de suspensão.
-  Assim, a força total aplicada ao feixe corresponde à soma das forças resistidas por cada uma das lâminas, característica típica de uma associação em paralelo.



- Essa configuração é essencial para o desempenho do feixe de molas, pois proporciona uma rigidez estrutural elevada, fundamental para suportar grandes cargas, como é requerido em caminhões e veículos de transporte pesado.
- Ao mesmo tempo, a associação em paralelo permite certa flexibilidade do sistema, possibilitando que o feixe atue como um elemento de amortecimento que absorve parte da energia vibratória resultante do contato do veículo com superfícies irregulares.
- A rigidez equivalente do feixe é determinada pela soma das rigidezes individuais das lâminas, e a adição ou remoção de lâminas modifica diretamente a capacidade de carga e o comportamento dinâmico do sistema.



Exemplo Prático - Feixe de Molas em Caminhões

Aula 3

- 🌐 A escolha da associação em paralelo no projeto do feixe de molas deve-se à necessidade de combinar resistência, durabilidade e eficiência na dissipação de vibrações.
- 🌐 Enquanto sistemas de molas em série oferecem maior flexibilidade e maiores deslocamentos sob carga, eles não são adequados para aplicações que exigem alta resistência e controle preciso de deformações, como no caso do transporte de cargas pesadas.
- 🌐 Assim, a associação em paralelo se apresenta como a solução mais apropriada, assegurando que o feixe de molas atenda às exigências funcionais e de segurança dos veículos comerciais.
- 🌐 A análise dessa associação é fundamental para o dimensionamento correto do sistema, a fim de evitar falhas estruturais e assegurar o conforto e a segurança na operação do veículo, especialmente em situações que envolvem intensas solicitações dinâmicas e vibrações.



Exemplo Prático - Feixe de Molas em Caminhões

Aula 3





Exemplo de Aplicação

Aula 3

- ☉ A figura mostra o sistema de suspensão de um vagão ferroviário de carga com um arranjo de molas em paralelo. Determine a constante elástica equivalente da suspensão se cada uma das três molas helicoidais for fabricada em aço com um módulo de elasticidade transversal $G = 80 \text{ GPa}$ e tiver cinco espiras efetivas, diâmetro médio do enrolamento $D = 20 \text{ cm}$ e diâmetro do arame $d = 2 \text{ cm}$.





Solução do Exemplo

Aula 3

- ✈ A rigidez para uma mola helicoidal é determinada da seguinte forma:

$$k = \frac{d^4 \cdot G}{8 \cdot D^3 \cdot n}$$

- ✈ Portanto:

$$k = \frac{(0,02)^4 \cdot (80 \cdot 10^9)}{8 \cdot (0,2)^3 \cdot 5}$$

$$k = 40000 \text{ N/m}$$



- ✈ Como as três molas são idênticas e estão associadas em paralelo, a rigidez equivalente do sistema será:

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + k_3$$

$$k_{eq} = k + k + k$$

$$k_{eq} = 3 \cdot k$$

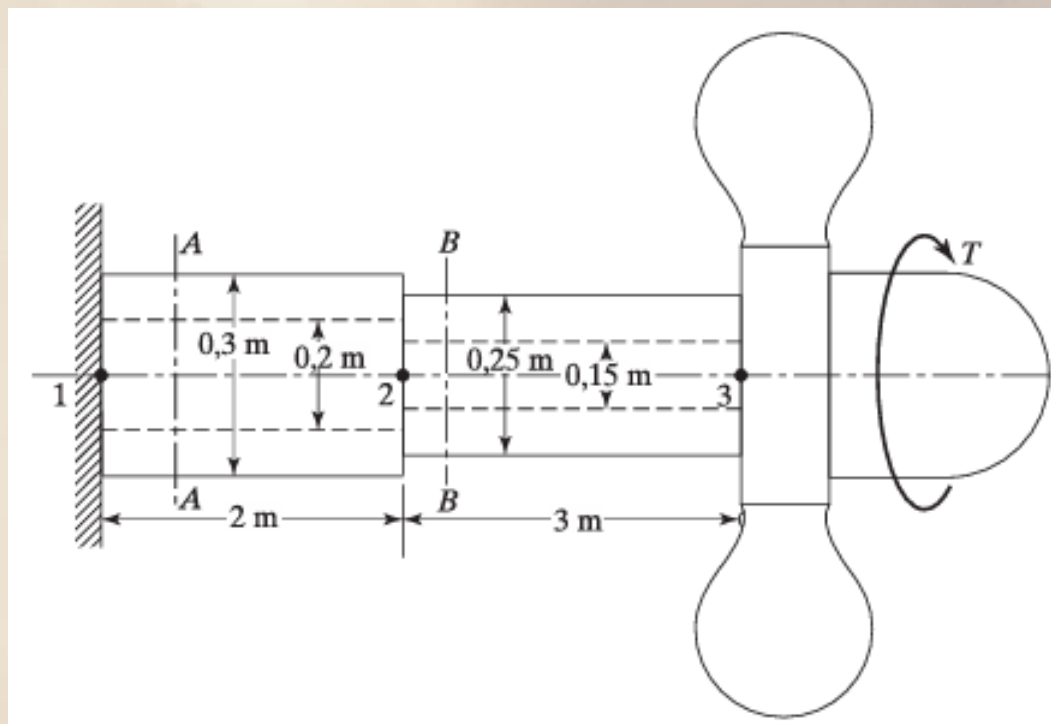
$$k_{eq} = 3 \cdot 40000 \quad \rightarrow \quad k_{eq} = 120000 \text{ N/m}$$



Exemplo de Aplicação

Aula 3

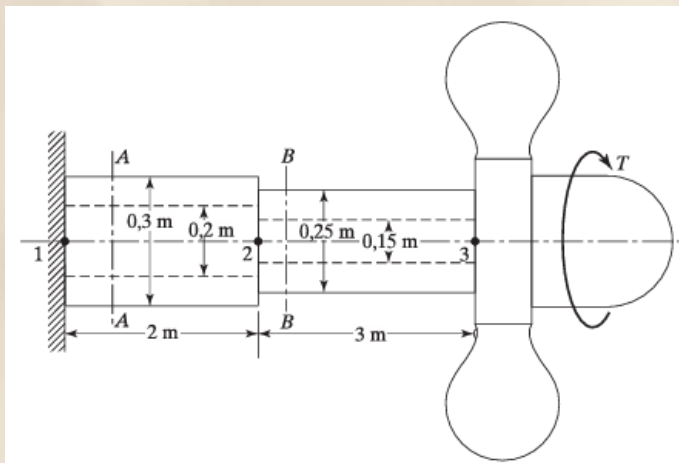
- ☞ Determine a constante elástica torcional do eixo de hélice em aço ($G = 80 \text{ GPa}$) mostrado na figura.





Solução do Exemplo

Aula 3



- Para a solução do problema é necessário considerar os segmentos 1,2 e 2,3 do eixo como uma associação de molas em série, pois pode-se verificar que o torque induzido em qualquer seção transversal do eixo é igual ao torque T aplicado na hélice.

- Para um eixo vazado, o momento polar de inércia J é dado por:

$$J = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32}$$

- A constante elástica torcional para um eixo vazado é determinada da seguinte forma:

$$k = \frac{G \cdot J}{l}$$

- Portanto, combinando-se as duas equações:

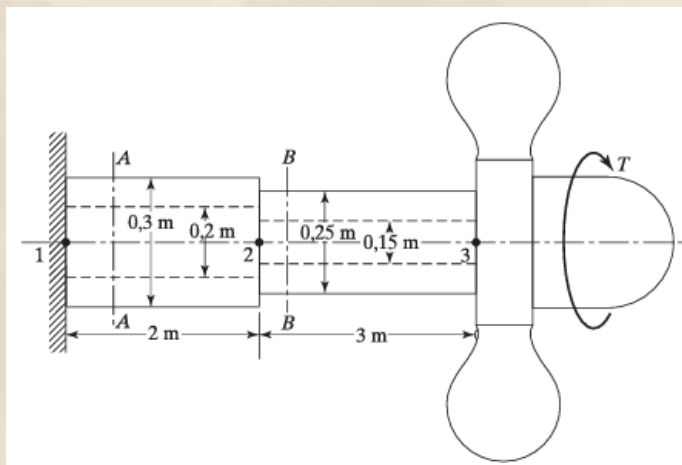
$$k = \frac{G}{l} \cdot \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32}$$

$$k = \frac{\pi \cdot G \cdot (D^4 - d^4)}{32 \cdot l}$$



Solução do Exemplo

Aula 3



Para o segmento 1,2, tem-se que:

$$k_{t1,2} = \frac{\pi \cdot G \cdot (D_{1,2}^4 - d_{1,2}^4)}{32 \cdot l_{1,2}}$$

$$k_{t1,2} = \frac{\pi \cdot (80 \cdot 10^9) \cdot (0,3^4 - 0,2^4)}{32 \cdot 2}$$

$$k_{t1,2} = 25,5255 \cdot 10^6 \text{ Nm/rad}$$

Para o segmento 2,3, tem-se que:

$$k_{t2,3} = \frac{\pi \cdot G \cdot (D_{2,3}^4 - d_{2,3}^4)}{32 \cdot l_{2,3}}$$

$$k_{t2,3} = \frac{\pi \cdot (80 \cdot 10^9) \cdot (0,25^4 - 0,15^4)}{32 \cdot 3}$$

$$k_{t2,3} = 8,9012 \cdot 10^6 \text{ Nm/rad}$$

Como o sistema está associado em série, a rigidez equivalente será:

$$\frac{1}{k_{teq}} = \frac{1}{k_{t1,2}} + \frac{1}{k_{t2,3}}$$



Solução do Exemplo

Aula 3

$$\frac{1}{k_{teq}} = \frac{1}{k_{t1,2}} + \frac{1}{k_{t2,3}}$$

🌐 O mínimo múltiplo comum do termo direito da equação é:

$$k_{t1,2} \cdot k_{t2,3}$$

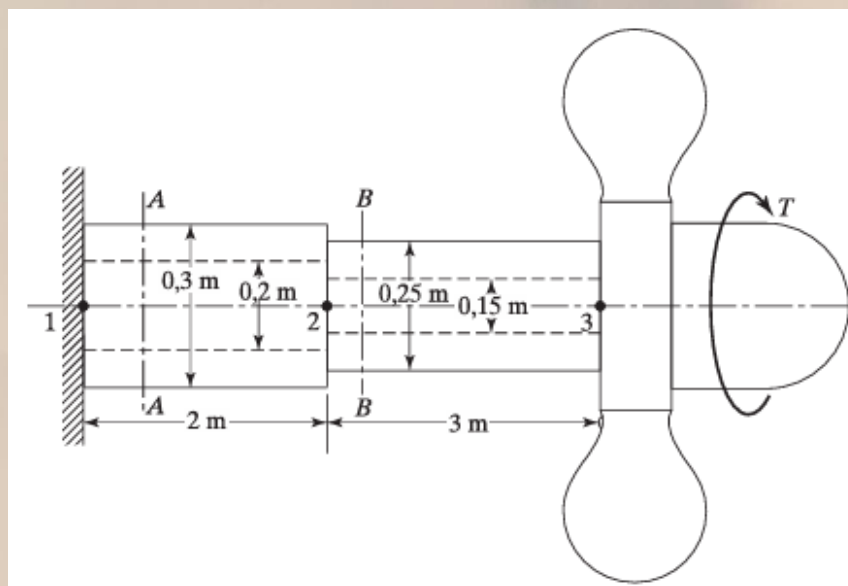
🌐 Portanto:

$$\frac{1}{k_{teq}} = \frac{k_{t1,2} + k_{t2,3}}{k_{t1,2} \cdot k_{t2,3}}$$

$$k_{teq} = \frac{k_{t1,2} \cdot k_{t2,3}}{k_{t1,2} + k_{t2,3}}$$

$$k_{teq} = \frac{25,5255 \cdot 10^6 \cdot 8,9012 \cdot 10^6}{25,5255 \cdot 10^6 + 8,9012 \cdot 10^6}$$

$$k_{teq} = 6,5997 \cdot 10^6 \text{ Nm/rad}$$

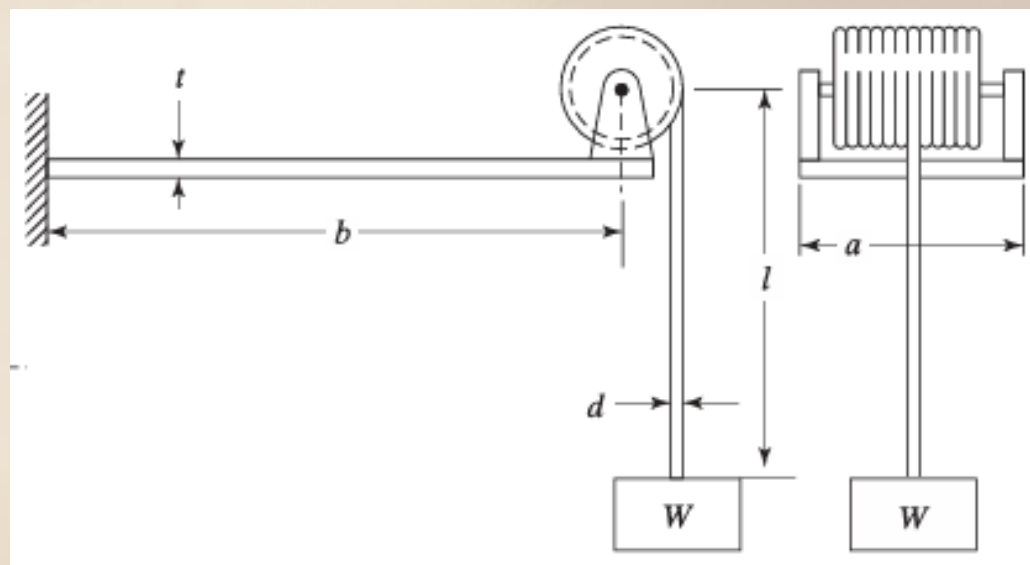




Exemplo de Aplicação

Aula 3

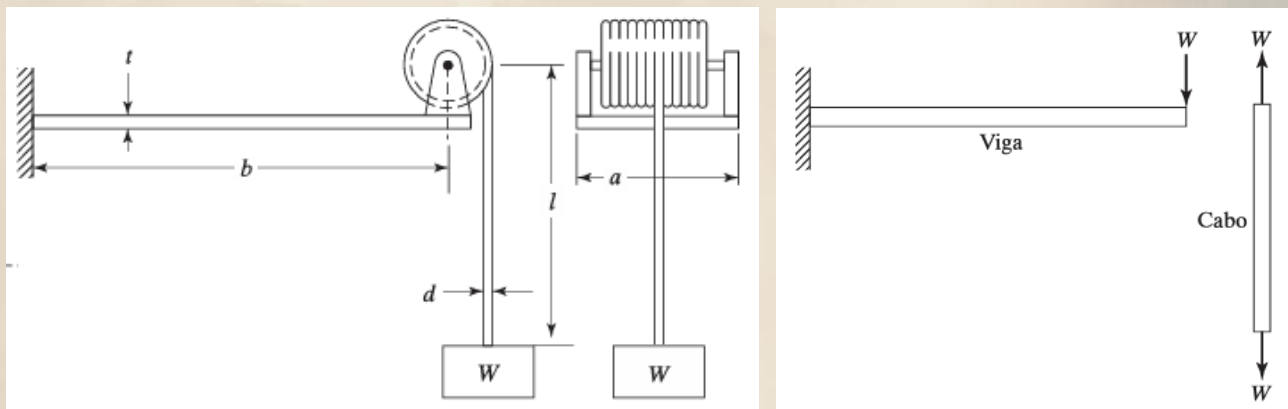
- Um tambor de içamento equipado com um cabo de aço é montado na extremidade de uma viga em balanço como mostrado na figura. Determine a constante elástica equivalente do sistema quando o comprimento de suspensão do cabo é l . Admita que o diâmetro efetivo da seção transversal do cabo é d e que o módulo de elasticidade da viga e do cabo é E .





Solução do Exemplo

Aula 3



- Para uma viga em balanço, a constante elástica é dada por:

$$k_b = \frac{3 \cdot E \cdot I}{l^3}$$

- O momento de inércia da viga é dado por:

$$I = \frac{1}{12} \cdot a \cdot t^3$$

- Considerando as dimensões mostradas na figura, pode-se escrever que:

$$k_b = \frac{3 \cdot E \cdot \frac{1}{12} \cdot a \cdot t^3}{b^3}$$

$$k_b = \frac{3 \cdot E \cdot a \cdot t^3}{12 \cdot b^3} \rightarrow k_b = \frac{E \cdot a \cdot t^3}{4 \cdot b^3}$$

- Para o cabo de seção circular com carregamento axial, a constante elástica é dada por:

$$k_r = \frac{A \cdot E}{l} \rightarrow k_r = \frac{\frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot E}{l}$$

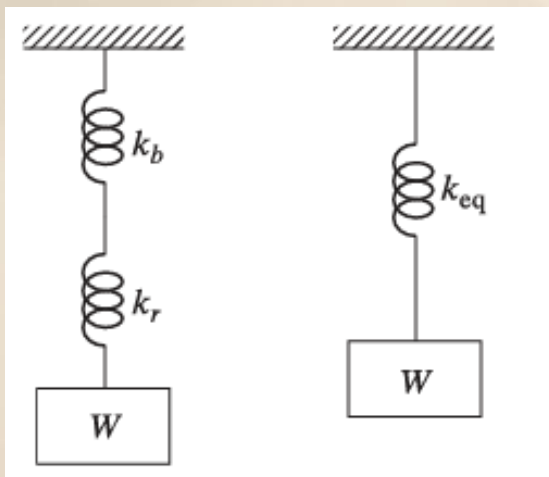
$$k_r = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot E}{4 \cdot l}$$



Solução do Exemplo

Aula 3

- ✈ Visto que tanto o cabo quanto a viga estão submetidos a mesma carga W , o sistema pode ser modelado como uma associação de molas em série, portanto:



$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_b} + \frac{1}{k_r}$$

- ✈ O mínimo múltiplo comum do termo direito da equação é:

$$E^2 \cdot a \cdot t^3 \cdot \pi \cdot d^2$$

✈ Portanto:

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{E \cdot \pi \cdot d^2 \cdot 4 \cdot b^3 + E \cdot a \cdot t^3 \cdot 4 \cdot l}{E^2 \cdot a \cdot t^3 \cdot \pi \cdot d^2}$$



Solução do Exemplo

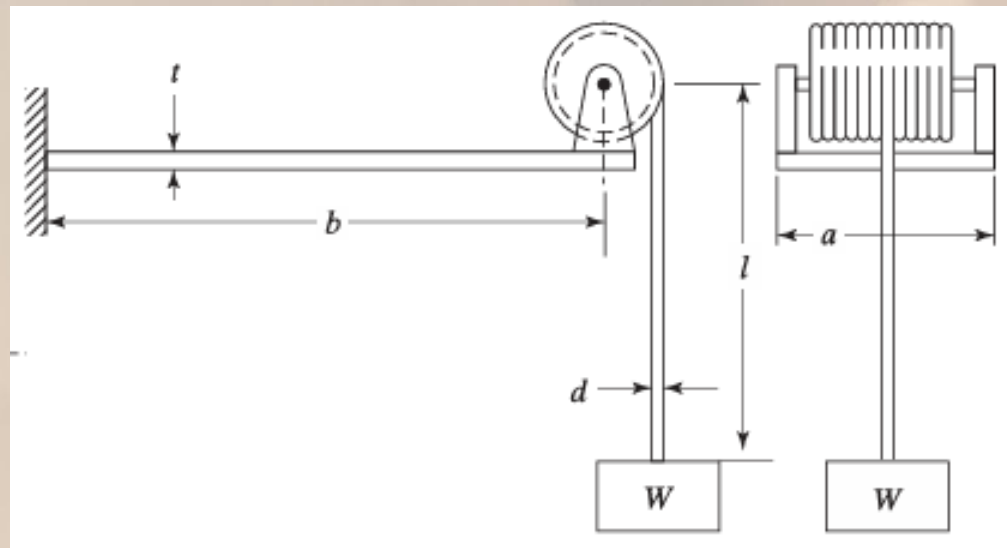
Aula 3

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{E \cdot \pi \cdot d^2 \cdot 4 \cdot b^3 + E \cdot a \cdot t^3 \cdot 4 \cdot l}{E^2 \cdot a \cdot t^3 \cdot \pi \cdot d^2}$$

$$\frac{E^2 \cdot a \cdot t^3 \cdot \pi \cdot d^2}{E \cdot \pi \cdot d^2 \cdot 4 \cdot b^3 + E \cdot a \cdot t^3 \cdot 4 \cdot l} = k_{eq}$$

$$k_{eq} = \frac{E^2 \cdot a \cdot t^3 \cdot \pi \cdot d^2}{4 \cdot E \cdot (\pi \cdot d^2 \cdot b^3 + a \cdot t^3 \cdot l)}$$

$$k_{eq} = \frac{E}{4} \cdot \left(\frac{\pi \cdot a \cdot t^3 \cdot d^2}{\pi \cdot d^2 \cdot b^3 + l \cdot a \cdot t^3} \right)$$

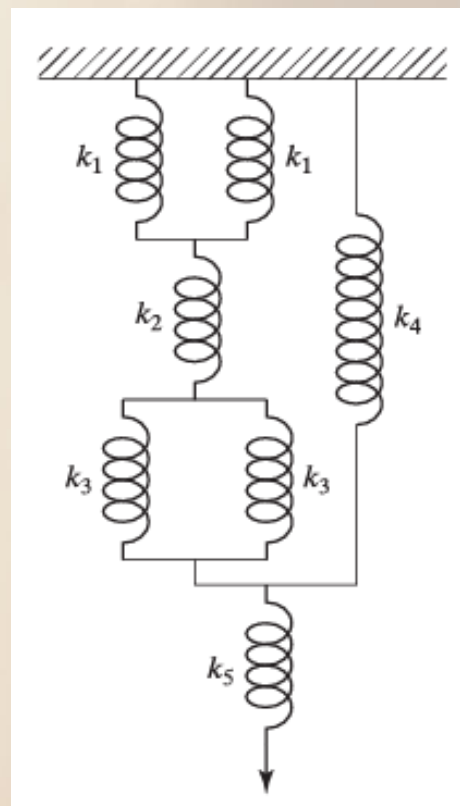




Exercícios Propostos

Aula 3

1. Determine a constante elástica equivalente do sistema mostrado na figura.

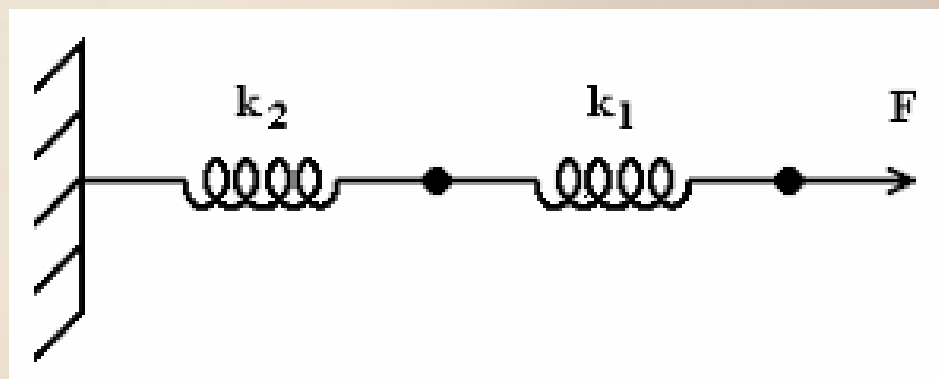




Exercícios Propostos

Aula 3

2. Uma mola de constante elástica $k_1 = 24 \text{ N/m}$ é associada em série a uma segunda mola de constante elástica $k_2 = 45 \text{ N/m}$, que está conectada a uma parede rígida na outra extremidade, conforme mostra a figura a seguir. Uma pessoa aplica uma força F à uma primeira mola, distendendo-a em 15 cm relativo ao seu comprimento não deformado em equilíbrio. Calcule a distensão da segunda mola, em cm.

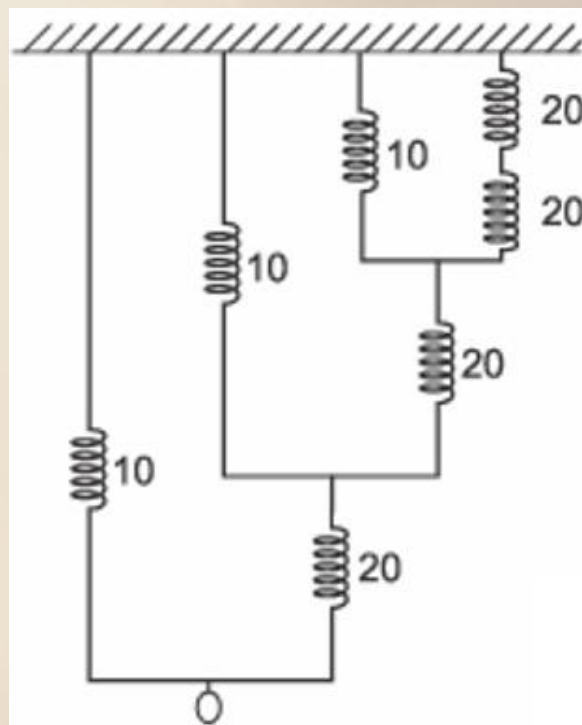




Exercícios Propostos

Aula 3

3. Um sistema com molas é montado conforme mostrado na figura a seguir, onde a constante elástica de cada uma delas é, alternadamente, 10 N/m e 20 N/m. Determine o valor da constante elástica equivalente do sistema, em N/m.

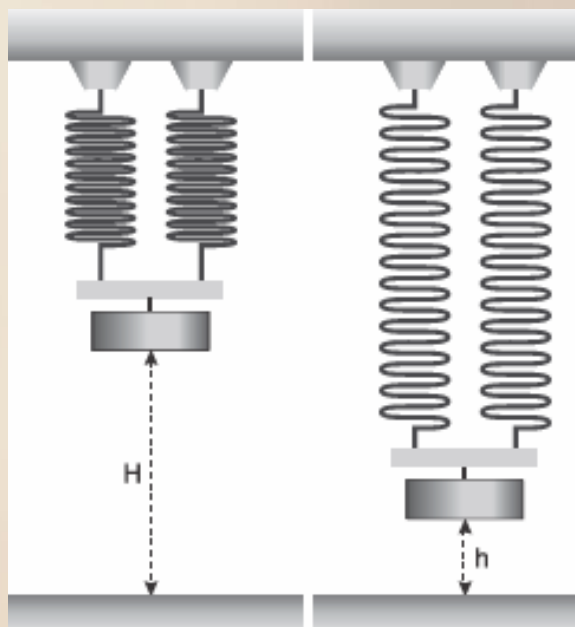




Exercícios Propostos

Aula 3

4. Uma massa de 0,50 kg está presa na extremidade de um sistema formado por duas molas em paralelo, conforme mostra a figura a seguir. As molas são idênticas, de constante elástica e massa desprezível. A outra extremidade do sistema está fixa em um apoio de teto de modo que o sistema fica verticalmente posicionado. A massa é lentamente solta da posição de relaxamento do sistema, a uma altura $H = 12$ cm do plano de uma mesa, até que fique em repouso. Determine a que altura h da mesa o sistema atingirá novamente o seu ponto de equilíbrio estático. Considere $g = 9,81$ m/s².

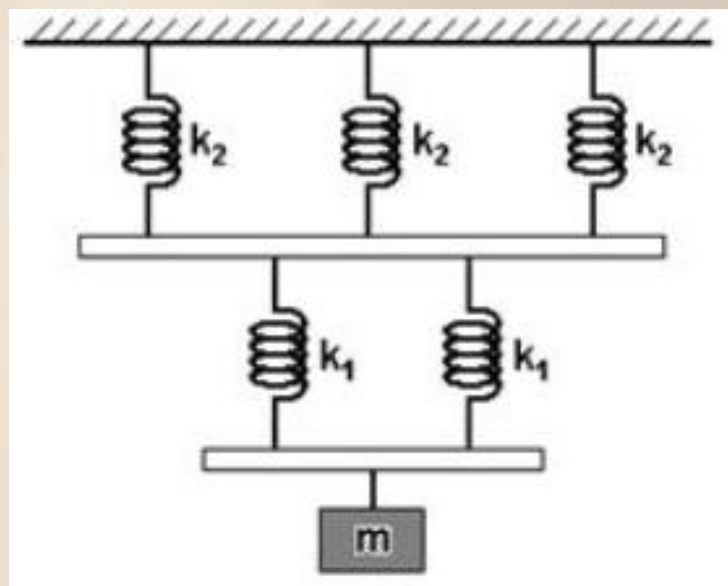




Exercícios Propostos

Aula 3

5. Um sistema é constituído por molas de constantes k_1 e k_2 , respectivamente, barras de massas desprezíveis e um corpo de massa m , como mostrado na figura. Determine a frequência natural desse sistema.



Obrigado Pela Atenção

Nos Encontramos na Próxima Aula





Aula - 4

Elementos de Massas



Conteúdos Abordados Nessa Aula

Aula 4

 Elementos de Massas;

 Associação de Massas.



Definição de Massa

Aula 4

- 🌐 Na análise de vibrações mecânicas, a massa é um dos elementos fundamentais que compõem os modelos físicos dos sistemas vibratórios, representando a inércia do corpo ou do componente analisado.
- 🌐 A massa é a propriedade física que expressa a quantidade de matéria de um corpo e sua resistência à mudança de movimento quando submetido a uma força.
- 🌐 No contexto das vibrações, ela se manifesta como a capacidade do sistema de armazenar energia cinética durante o movimento oscilatório.
- 🌐 Sempre que uma força é aplicada sobre um sistema vibratório, a massa resiste à aceleração imposta, gerando uma reação proporcional segundo a segunda lei de Newton

$$F = m \cdot a$$



-  Na modelagem matemática dos sistemas vibratórios, a massa é geralmente representada como um ponto concentrado ou como uma distribuição contínua, dependendo da complexidade do sistema analisado.
-  Em sistemas simplificados de um grau de liberdade, a massa é frequentemente tratada como um corpo rígido que não sofre deformações internas, concentrando-se em um único ponto.
-  Já em sistemas mais complexos, com vários graus de liberdade ou estruturas distribuídas, a massa pode ser modelada como uma distribuição ao longo do comprimento, da superfície ou do volume, influenciando diretamente a dinâmica do sistema.



Relação da Massa com a Frequência Natural

Aula 4

- 🌐 A presença da massa no sistema afeta diretamente a frequência natural de vibração, uma vez que ela aparece na equação que define essa frequência, sendo inversamente proporcional à raiz quadrada da massa.
- 🌐 Isso significa que, quanto maior a massa, menor será a frequência natural, resultando em oscilações mais lentas.
- 🌐 Por outro lado, massas menores tendem a gerar frequências naturais mais elevadas, caracterizando vibrações mais rápidas.
- 🌐 Além disso, a massa influencia a amplitude de resposta do sistema quando este é submetido a excitações externas, especialmente na região próxima à ressonância, onde a combinação da massa com a rigidez do sistema determina o comportamento dinâmico.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}}$$



-  Portanto, na análise de vibrações mecânicas, a massa não é apenas um parâmetro físico passivo, mas sim um elemento determinante na definição da dinâmica do sistema.
-  Seu correto dimensionamento e modelagem são essenciais para prever o comportamento vibratório, otimizar o desempenho e garantir a segurança e a confiabilidade de máquinas, veículos, estruturas e equipamentos sujeitos a esforços dinâmicos.
-  A interação da massa com os outros elementos do sistema, como as molas e os amortecedores, compõe o alicerce da análise vibratória, permitindo aos engenheiros desenvolverem soluções eficazes para controle de vibrações em uma ampla gama de aplicações industriais e tecnológicas.



- ✈ Na análise de vibrações mecânicas, as técnicas de associação de massas são fundamentais para a modelagem e simplificação de sistemas físicos complexos, permitindo que se representem adequadamente os efeitos da inércia no comportamento dinâmico dos corpos.
- ✈ A associação de massas pode ocorrer de forma análoga às associações de molas, sendo realizada basicamente em série ou em paralelo, dependendo da configuração física e do tipo de movimento analisado.



- Quando massas estão associadas em série, significa que estão ligadas de forma que o movimento de uma depende diretamente do movimento da outra, e o deslocamento total do sistema é a soma dos deslocamentos individuais das massas.
- Esse tipo de associação é comum em sistemas onde componentes estão conectados por elementos flexíveis, e cada massa se desloca em relação à outra, resultando em movimentos relativos complexos.
- A formulação matemática para massas em série leva em consideração que a força transmitida é a mesma para cada massa, mas os deslocamentos podem variar.



- ✈ A associação de massas em paralelo ocorre quando múltiplas massas estão sujeitas ao mesmo deslocamento, porém recebem forças individuais proporcionais às suas respectivas inércias.

Nesse caso, a massa equivalente do sistema é simplesmente a soma das massas associadas, e o
- ✈ comportamento dinâmico reflete a combinação direta de suas inércias, sendo uma técnica bastante utilizada na modelagem de estruturas em que várias partes se movem rigidamente juntas, como plataformas, vigas ou placas.
- ✈ A utilização correta da técnica de associação de massas é essencial para definir a matriz de massa em modelos de múltiplos graus de liberdade, seja em métodos analíticos, como a formulação direta das equações diferenciais, ou em métodos numéricos, como o método dos elementos finitos, no qual as massas podem ser concentradas nos nós ou distribuídas ao longo dos elementos.



Estratégias para Associação de Massas

Aula 4

- ✈ A associação de massas é uma estratégia indispensável no desenvolvimento de modelos de vibração simplificados.
- ✈ Essa abordagem permite capturar com boa precisão os principais modos de vibração do sistema, especialmente os modos de baixa frequência, que costumam ser os mais relevantes do ponto de vista de desempenho e segurança estrutural.
- ✈ A correta escolha entre modelar as massas como concentradas ou distribuídas, bem como sua associação em série ou em paralelo, impacta diretamente na determinação das frequências naturais, dos modos de vibração e da resposta dinâmica a excitações externas.
- ✈ Portanto, compreender e aplicar adequadamente as técnicas de associação de massas é uma etapa fundamental na análise de vibrações, garantindo que os modelos representem fielmente a realidade física do sistema e possibilitando o desenvolvimento de soluções eficientes para o controle de vibrações em aplicações industriais, automotivas, aeroespaciais, civis e em diversos outros setores da engenharia.



Massas em Movimento de Translação

Aula 4

-  Na análise de vibrações mecânicas, quando se trata da associação de massas que estão em movimento de translação, diversas técnicas de solução matemática são aplicadas para compreender o comportamento dinâmico do sistema.
-  A base dessas soluções reside na formulação das equações diferenciais do movimento, que descrevem como as forças inerciais, elásticas e, eventualmente, dissipativas atuam sobre as massas ao longo do tempo.
-  Para massas associadas em movimento de translação, o primeiro passo é aplicar a segunda lei de Newton a cada massa, considerando que a força resultante sobre ela é igual ao produto da massa pela aceleração.
-  A partir desse princípio fundamental, são construídas as equações diferenciais que, no caso de sistemas com várias massas, se apresentam como sistemas de equações diferenciais acopladas.



Massas em Movimento de Rotação

Aula 4

- 🌐 Na análise de vibrações mecânicas, quando se tratam de massas associadas que estão em movimento de rotação, as técnicas de solução matemática seguem princípios análogos aos aplicados em movimentos de translação, porém adaptadas às características próprias dos sistemas rotacionais.
- 🌐 A base fundamental é a aplicação da segunda lei de Newton para o movimento angular, onde o somatório dos momentos resultantes atuando sobre uma massa é igual ao produto do momento de inércia pela aceleração angular.
- 🌐 Nesse contexto, a massa linear é substituída pelo momento de inércia, que representa a resistência da massa a mudanças em seu estado de rotação. As forças lineares são substituídas pelos torques ou momentos, e os deslocamentos lineares são representados por deslocamentos angulares.



- 🌐 Na análise de vibrações mecânicas, quando as massas estão submetidas a movimento plano geral, ou seja, um movimento que envolve simultaneamente translação e rotação acopladas, as técnicas de solução matemática tornam-se consideravelmente mais complexas e exigem uma abordagem integrada que leve em consideração tanto os efeitos lineares quanto os angulares.
- 🌐 Nesse contexto, cada elemento do sistema possui tanto graus de liberdade translacionais quanto rotacionais, e as equações que regem o movimento devem refletir essa interação dinâmica entre deslocamentos lineares e angulares.
- 🌐 A formulação matemática parte da aplicação simultânea das leis de Newton para a translação e das leis de Euler para a rotação, resultando em sistemas de equações diferenciais acopladas que descrevem o comportamento dinâmico completo do corpo.



Exemplo Prático – Automóvel

Aula 4

-  Um exemplo prático de associação de massas na análise de vibrações mecânicas pode ser observado no estudo do comportamento dinâmico de um veículo automotivo, especialmente no sistema composto pelo chassi e pela suspensão.
-  Neste contexto, o chassi do veículo é modelado como uma massa concentrada que representa a maior parte da massa total do automóvel, enquanto cada conjunto de roda e suspensão pode ser representado por massas menores associadas a ele.
-  Essas massas não estão isoladas, mas sim associadas de forma que seus movimentos estejam interligados, tanto no sentido vertical quanto em rotações associadas ao balanço do veículo.
-  Quando o veículo percorre uma estrada irregular, as massas das rodas sofrem excitações provenientes das imperfeições do solo, transmitindo forças ao chassi através dos elementos elásticos e amortecedores do sistema de suspensão.



Exemplo Prático – Automóvel

Aula 4

-  A modelagem desse sistema resulta em um conjunto de massas acopladas, onde as massas das rodas estão em movimento relativo em relação ao chassi, e esse, por sua vez, também responde dinamicamente às forças transmitidas.
-  Na formulação matemática, aplicam-se as leis da dinâmica para cada uma dessas massas, considerando tanto as forças verticais quanto os momentos de inércia associados a oscilações como arfagem e balanço.
-  As equações diferenciais que governam esse sistema permitem prever, por exemplo, como o veículo se comportará ao passar por obstáculos ou ao trafegar em terrenos irregulares.
-  A correta associação das massas, seja em paralelo, como ocorre quando se consideram os movimentos simultâneos das quatro rodas, ou em série, como nos casos em que se analisa o efeito da interação entre o conjunto roda-suspensão e o chassi, é fundamental para determinar as frequências naturais e os modos de vibração do veículo.



Exemplo Prático – Automóvel

Aula 4

- Esse estudo permite, na prática, realizar ajustes no projeto da suspensão, alterar rigidezes, distribuir melhor as massas ou incluir dispositivos de controle de vibrações, tudo visando melhorar o conforto dos ocupantes e garantir a estabilidade e segurança do automóvel.
- Portanto, esse exemplo evidencia claramente como a associação de massas na análise de vibrações mecânicas não é apenas um conceito teórico, mas uma ferramenta indispensável no desenvolvimento de soluções eficientes na engenharia automotiva.

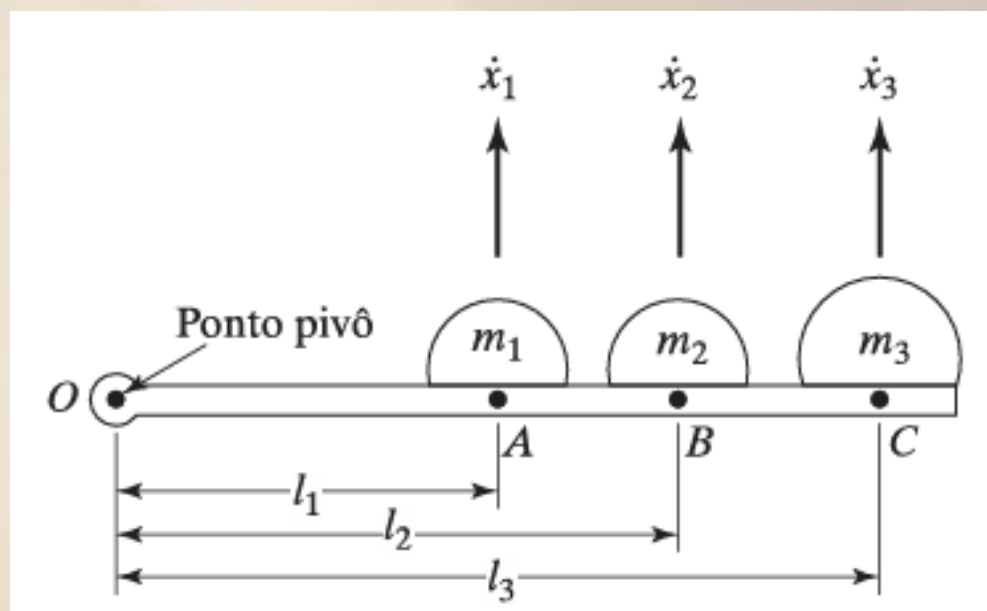




Exemplo de Aplicação

Aula 4

- ☉ Determine a massa equivalente para o sistema de massas acopladas à barra rígida articulada mostrada na figura. Considere que a massa equivalente estará aplicada ao ponto A e que $m_1 = 0,5$ kg, $m_2 = 0,5$ kg, $m_3 = 0,75$ kg, $l_1 = 0,5$ m, $l_2 = 1$ m e $l_3 = 1,5$ m.





Solução do Exemplo

Aula 4

- ✈ Admitindo pequenos deslocamentos angulares da barra, as velocidades das massas m_2 e m_3 podem ser relacionadas com a velocidade da massa m_1 da seguinte forma:

✈ Massa m_2 : $\longrightarrow \dot{x}_2 = \frac{l_2}{l_1} \cdot \dot{x}_1$

✈ Massa m_3 : $\longrightarrow \dot{x}_3 = \frac{l_3}{l_1} \cdot \dot{x}_1$

- ✈ Como a posição da massa equivalente deve coincidir com a posição da massa m_1 , tem-se uma relação direta entre as velocidades:

✈ Massa m_{eq} : $\longrightarrow \dot{x}_{eq} = \dot{x}_1$

- ✈ Igualando a energia cinética do sistema de três massas com a do sistema de massa equivalente, obtém-se:

$$\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot \dot{x}_3^2 = \frac{1}{2} \cdot m_{eq} \cdot \dot{x}_{eq}^2$$



Solução do Exemplo

Aula 4

✈ Substituindo as velocidades, obtém-se:

$$\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \left(\frac{l_2}{l_1} \cdot \dot{x}_1 \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot \left(\frac{l_3}{l_1} \cdot \dot{x}_1 \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot m_{eq} \cdot \dot{x}_1^2$$

$$\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \left(\frac{l_2}{l_1} \right)^2 \cdot \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot \left(\frac{l_3}{l_1} \right)^2 \cdot \dot{x}_1^2 = \frac{1}{2} \cdot m_{eq} \cdot \dot{x}_1^2$$

$$\frac{1}{2} \cdot \dot{x}_1^2 \cdot \left[m_1 + m_2 \cdot \left(\frac{l_2}{l_1} \right)^2 + m_3 \cdot \left(\frac{l_3}{l_1} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \cdot \dot{x}_1^2 \cdot m_{eq}$$

$$\left[m_1 + m_2 \cdot \left(\frac{l_2}{l_1} \right)^2 + m_3 \cdot \left(\frac{l_3}{l_1} \right)^2 \right] = m_{eq}$$

✈ Portanto:

$$m_{eq} = \left[m_1 + m_2 \cdot \left(\frac{l_2}{l_1} \right)^2 + m_3 \cdot \left(\frac{l_3}{l_1} \right)^2 \right]$$

✈ Substituindo os valores fornecidos:

$$m_{eq} = \left[0,5 + 0,5 \cdot \left(\frac{1}{0,5} \right)^2 + 0,75 \cdot \left(\frac{1,5}{0,5} \right)^2 \right]$$

$$m_{eq} = [0,5 + 2,0 + 6,75]$$

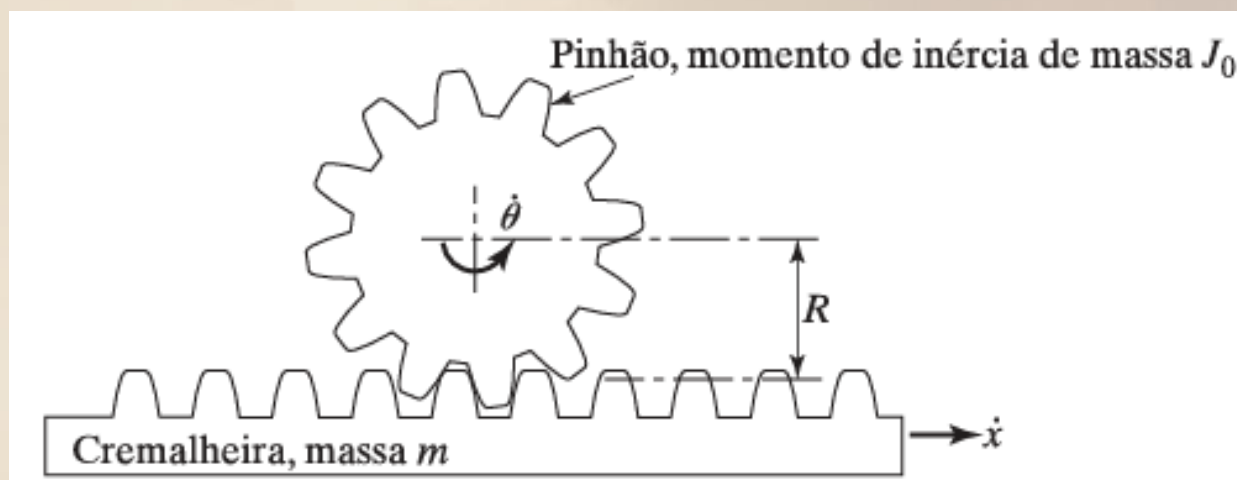
$$m_{eq} = 9,25 \text{ kg}$$



Exemplo de Aplicação

Aula 4

- ☉ Determine a massa equivalente para o sistema de massas de translação e rotação acopladas em um sistema cremalheira e pinhão conforme mostrado na figura.

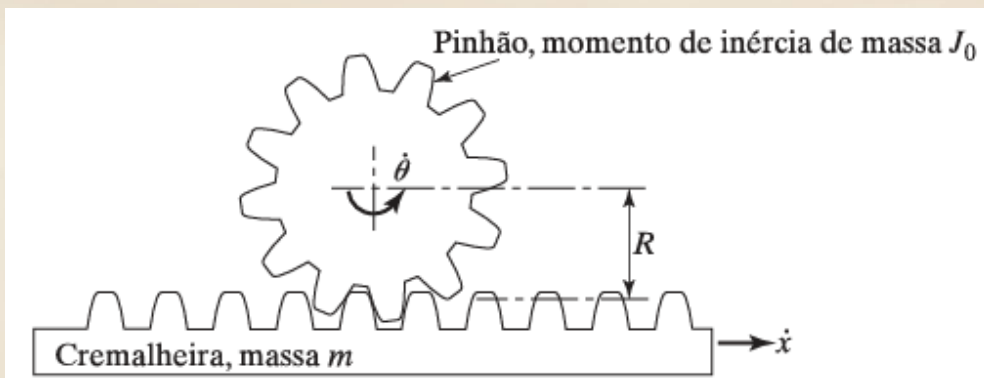




Solução do Exemplo

Aula 4

- Considerando a massa m , com velocidade de translação $\dot{x}$, acoplada a outra massa (de momento de inércia J_0) com uma velocidade rotacional $\dot{\theta}$, conforme mostrado na figura, tem-se que essas duas massas podem ser associadas para se obter uma única massa equivalente de translação (m_{eq}), ou uma única massa equivalente de rotação (J_{eq}).



- Caso 1 – Massa Equivalente de Translação:

- Nessa situação, a energia cinética das duas massas é dada por:

$$T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot J_0 \cdot \dot{\theta}^2$$

- A energia cinética da massa equivalente é dada por:

$$T_{eq} = \frac{1}{2} \cdot m_{eq} \cdot \dot{x}_{eq}^2$$



Solução do Exemplo

Aula 4

🌐 Aplicando a conservação da energia cinética ($T = T_{eq}$), tem-se que:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot J_0 \cdot \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \cdot m_{eq} \cdot \dot{x}_{eq}^2$$

🌐 Considerando $\dot{x}_{eq} = \dot{x}$ e $\dot{\theta} = \dot{x}/R$:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot J_0 \cdot \left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot m_{eq} \cdot \dot{x}^2$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot J_0 \cdot \frac{\dot{x}^2}{R^2} = \frac{1}{2} \cdot m_{eq} \cdot \dot{x}^2$$

$$\frac{1}{2} \cdot \dot{x}^2 \cdot \left(m + \frac{J_0}{R^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \dot{x}^2 \cdot m_{eq}$$

🌐 Portanto: $\Rightarrow m_{eq} = \left(m + \frac{J_0}{R^2}\right)$

🌐 Caso 2 – Massa Equivalente Rotacional:

🌐 Nessa situação, a energia cinética das duas massas é dada por:

$$T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot J_0 \cdot \dot{\theta}^2$$

🌐 A energia cinética da massa equivalente rotacional é dada por:

$$T_{eq} = \frac{1}{2} \cdot J_{eq} \cdot \dot{\theta}_{eq}^2$$



Solução do Exemplo

Aula 4

🌐 Aplicando a conservação da energia cinética ($T = T_{eq}$), tem-se que:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot J_0 \cdot \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \cdot J_{eq} \cdot \dot{\theta}_{eq}^2$$

🌐 Nessa situação $\dot{\theta}_{eq} = \dot{\theta}$ e $\dot{x} = \dot{\theta} \cdot R$:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot (\dot{\theta} \cdot R)^2 + \frac{1}{2} \cdot J_0 \cdot \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \cdot J_{eq} \cdot \dot{\theta}^2$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{\theta}^2 \cdot R^2 + \frac{1}{2} \cdot J_0 \cdot \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \cdot J_{eq} \cdot \dot{\theta}^2$$

$$\frac{1}{2} \cdot \dot{\theta}^2 \cdot (m \cdot R^2 + J_0) = \frac{1}{2} \cdot \dot{\theta}^2 \cdot J_{eq}$$

🌐 Portanto:

$$J_{eq} = J_0 + (m \cdot R^2)$$

Obrigado Pela Atenção

Nos Encontramos na Próxima Aula





Aula - 5

Elementos de Amortecimento



Conteúdos Abordados Nessa Aula

Aula 5

 Elementos de Amortecimento;

 Associação de Amortecedores.



Definição de Amortecedor

Aula 5

- 🌐 Na análise de vibrações mecânicas, os amortecedores são dispositivos fundamentais cuja principal função é dissipar a energia mecânica gerada pelo movimento oscilatório de um sistema.
- 🌐 Quando uma estrutura ou máquina está sujeita a vibrações, a tendência natural é que a energia cinética e potencial envolvidas nesse processo se mantenham em um ciclo contínuo de troca, especialmente em sistemas ideais sem perdas.
- 🌐 No entanto, na prática, é necessário controlar e reduzir essas vibrações para evitar danos estruturais, fadiga dos materiais, desconforto ou perda de desempenho.
- 🌐 É nesse contexto que o amortecedor atua, convertendo parte da energia vibracional em calor por meio de mecanismos como o atrito viscoso, forças de histerese ou resistências hidráulicas.



Resposta Dinâmica do Sistema Amortecido

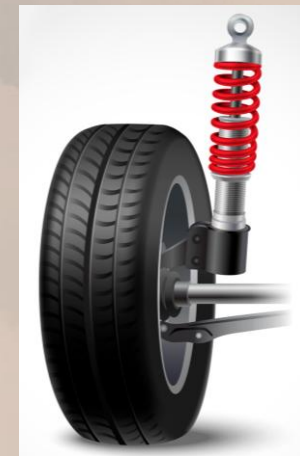
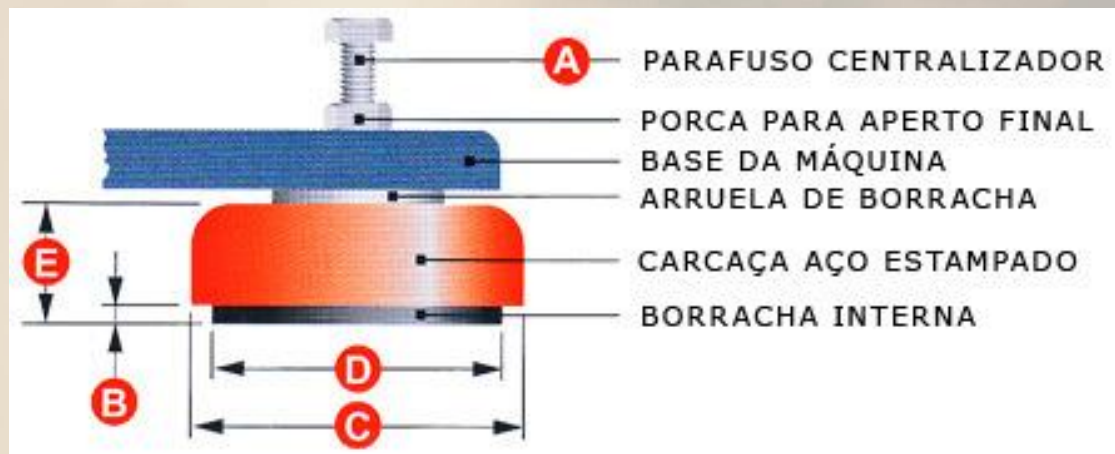
Aula 5

-  A presença do amortecedor altera significativamente a resposta dinâmica do sistema, atenuando a amplitude das oscilações ao longo do tempo, especialmente nas proximidades da frequência natural, onde os efeitos da ressonância seriam mais críticos.
-  Em termos matemáticos, o amortecedor é geralmente representado por uma força proporcional à velocidade relativa entre dois pontos do sistema, sendo essa força descrita por uma constante de amortecimento multiplicada pela velocidade.
-  Os tipos mais comuns de amortecedores utilizados incluem os viscosos, hidráulicos e os com materiais elastoméricos que absorvem energia.
-  Em aplicações reais, como na suspensão de veículos, em sistemas de isolamento de máquinas ou em estruturas civis sujeitas a eventos sísmicos, os amortecedores são componentes indispensáveis para garantir segurança, durabilidade e conforto, evidenciando sua relevância prática na engenharia de vibrações.



Exemplos de Amortecedores

Aula 5





- 🌐 Na análise de vibrações mecânicas, as técnicas de associação de amortecedores são essenciais para a modelagem e o controle preciso da dissipação de energia em sistemas vibratórios compostos.
- 🌐 Essas associações seguem princípios semelhantes aos utilizados na combinação de molas e massas, permitindo representar de maneira eficaz a atuação conjunta de múltiplos elementos de amortecimento.
- 🌐 Os amortecedores podem ser associados em série ou em paralelo, dependendo da configuração física do sistema e do comportamento dinâmico desejado.



- 🌐 Na associação em série, a força total que atua sobre os amortecedores é a mesma para todos os elementos, enquanto a velocidade relativa total entre os pontos conectados é a soma das velocidades relativas de cada amortecedor.
- 🌐 Nesse caso, a constante de amortecimento equivalente é calculada de forma inversamente proporcional às constantes individuais, assim como ocorre com as resistências elétricas em série.
- 🌐 Já na associação em paralelo, os amortecedores compartilham a mesma velocidade relativa, e a força total é a soma das forças resistivas individuais, resultando em uma constante de amortecimento equivalente obtida pela soma direta das constantes dos componentes.



Escolha do Tipo de Associação

Aula 5

- ✈ A escolha entre esses arranjos depende dos requisitos de rigidez, dissipação e resposta dinâmica do sistema.
- ✈ Em aplicações industriais, por exemplo, pode-se combinar amortecedores viscosos com amortecedores estruturais para obter uma resposta mais eficaz diante de excitações externas variadas, como impactos, vibrações harmônicas ou aleatórias.
- ✈ A correta associação desses dispositivos permite não apenas melhorar o desempenho do sistema vibratório, mas também otimizar sua durabilidade, eficiência energética e segurança operacional, sendo uma estratégia fundamental na engenharia de projetos mecânicos, automotivos, aeroespaciais e civis.



- Na análise de vibrações mecânicas, as técnicas de solução matemática utilizadas na associação de amortecedores desempenham um papel fundamental na obtenção de modelos precisos que representem o comportamento dinâmico dos sistemas.
- Quando os amortecedores são associados, seja em série ou em paralelo, é necessário desenvolver equações diferenciais que descrevam a dissipação de energia promovida por esses dispositivos em função da velocidade relativa entre os elementos que compõem o sistema vibratório.
- A modelagem matemática desses sistemas é feita a partir da segunda lei de Newton ou do princípio de D'Alembert, considerando as forças de amortecimento como proporcionais à velocidade, segundo a equação $F = c \cdot \dot{x}$, onde c representa a constante de amortecimento e $\dot{x}$ é a velocidade relativa entre os pontos de interesse.

$$F = c \cdot \dot{x}$$



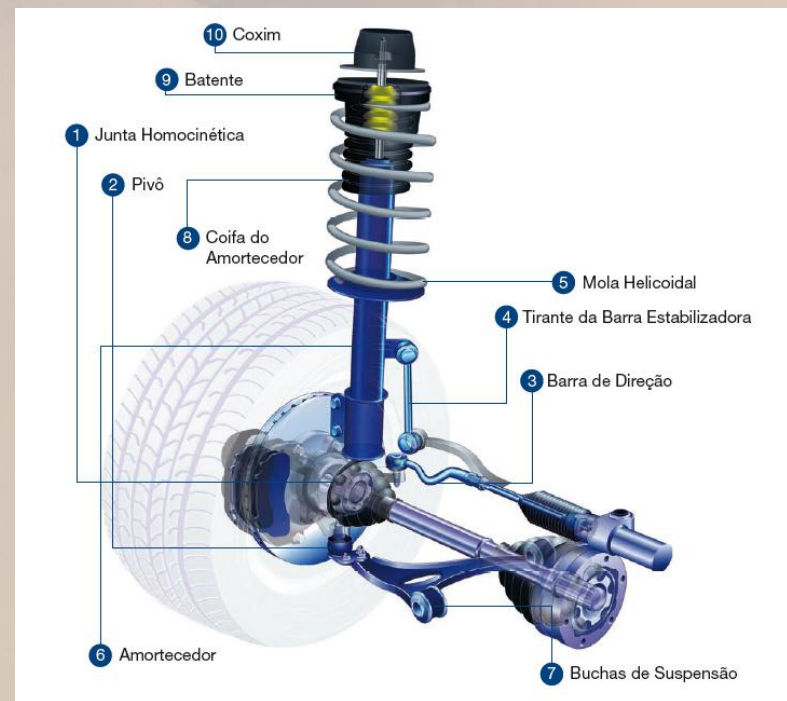
- As equações diferenciais que resultam das associações de amortecedores são, em geral, de segunda ordem e podem ser resolvidas por métodos analíticos clássicos, como o método de coeficientes indeterminados, a transformada de Laplace ou o uso de variáveis de estado.
- Para sistemas mais complexos, especialmente aqueles com múltiplos graus de liberdade e amortecedores distribuídos, torna-se necessário empregar técnicas numéricas como o método de Runge-Kutta, o método de Newmark ou o método das diferenças finitas.
- O uso de softwares de simulação, como MATLAB, ANSYS ou Simulink, é amplamente difundido para auxiliar na obtenção de soluções aproximadas, especialmente quando os sistemas possuem comportamentos não lineares, amortecimento dependente do tempo ou combinações com outros elementos mecânicos.
- Assim, as técnicas de solução matemática aplicadas às associações de amortecedores constituem uma base indispensável para o entendimento e controle do desempenho vibratório de estruturas e máquinas em diversos setores da engenharia.



Exemplo Prático – Amortecedor Automotivo

Aula 5

- Um exemplo prático de associação de amortecedores na análise de vibrações mecânicas pode ser observado no sistema de suspensão de um veículo automotivo moderno, no qual amortecedores hidráulicos são utilizados em paralelo com elementos elásticos como molas helicoidais para garantir conforto e estabilidade durante a condução.
- Nesse sistema, os amortecedores atuam para dissipar a energia cinética proveniente das irregularidades da pista, enquanto as molas armazenam e liberam energia de forma elástica.
- Em determinadas configurações de veículos, especialmente em modelos com suspensão adaptativa ou sistemas mais avançados de controle de estabilidade, podem existir múltiplos elementos de amortecimento dispostos de forma combinada, com diferentes características de resposta em função da velocidade ou da frequência da excitação.





Exemplo Prático – Amortecedor Automotivo

Aula 5

- 🌐 O amortecedor automotivo é um componente essencial no sistema de suspensão de veículos, cuja principal função é controlar e atenuar as vibrações provocadas pelas irregularidades do solo durante a movimentação.
- 🌐 Trata-se de um dispositivo dissipador de energia, geralmente do tipo hidráulico, composto por um cilindro preenchido com óleo e um pistão que se move em seu interior.
- 🌐 Quando o veículo passa por um obstáculo, como um buraco ou lombada, as molas da suspensão absorvem a energia do impacto, mas, sem um elemento de controle, essa energia seria liberada de forma oscilatória, gerando movimentos contínuos e desconfortáveis.
- 🌐 É nesse ponto que o amortecedor atua, resistindo ao movimento do pistão e convertendo parte da energia vibratória em calor, o qual é dissipado através do fluido.





Exemplo Prático – Amortecedor Automotivo

Aula 5

- Em determinados veículos, pode haver um amortecedor principal em paralelo com um amortecedor secundário que atua apenas em determinadas condições de carga ou aceleração.
- A análise matemática dessa associação considera o efeito combinado dos amortecedores sobre a dissipação de energia do sistema e resulta em um coeficiente de amortecimento equivalente, que pode ser ajustado por válvulas eletrônicas controladas por sensores de aceleração e deslocamento.
- Essa configuração é fundamental para evitar a ocorrência de oscilações excessivas após o impacto com buracos ou lombadas e para reduzir a transferência de vibrações à carroceria, melhorando significativamente a dirigibilidade e o conforto dos ocupantes.
- Assim, o estudo da associação de amortecedores permite compreender como diferentes mecanismos de dissipação atuam em conjunto para controlar a dinâmica vibratória de um sistema real, contribuindo para o desenvolvimento de soluções cada vez mais eficientes e seguras no campo da engenharia automotiva.



Exemplo Prático – Amortecedor Automotivo

Aula 5

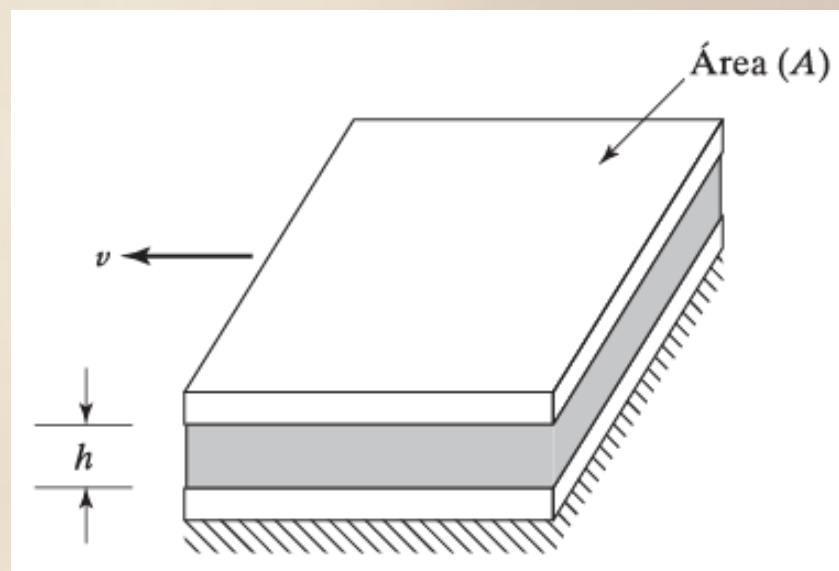
-  A presença do amortecedor no modelo do veículo influencia diretamente na resposta transitória e na estabilidade do sistema, sendo capaz de reduzir a amplitude das vibrações e acelerar a convergência ao estado de equilíbrio.
-  Em veículos modernos, a análise dessas vibrações permite o desenvolvimento de amortecedores inteligentes, cuja resistência varia conforme a intensidade das excitações, utilizando válvulas controladas eletronicamente.
-  Dessa forma, o estudo e a compreensão dos amortecedores automotivos sob a ótica das vibrações mecânicas permitem avanços significativos no conforto, na segurança e na durabilidade dos sistemas veiculares, sendo uma das aplicações mais práticas e visíveis da engenharia de vibrações no cotidiano.



Exemplo de Aplicação

Aula 5

- 🌐 Verificou-se que um mancal, que pode ser aproximado como duas placas planas separadas por uma fina camada de óleo lubrificante, oferece uma resistência de 400 N quando é usado óleo SAE30 como lubrificante e a velocidade relativa entre as placas é 10 m/s. Se a área das placas for $0,1 \text{ m}^2$, determine a folga entre as placas. Suponha que a viscosidade absoluta do óleo SAE30 seja $\mu = 0,3445 \text{ Pa.s}$.





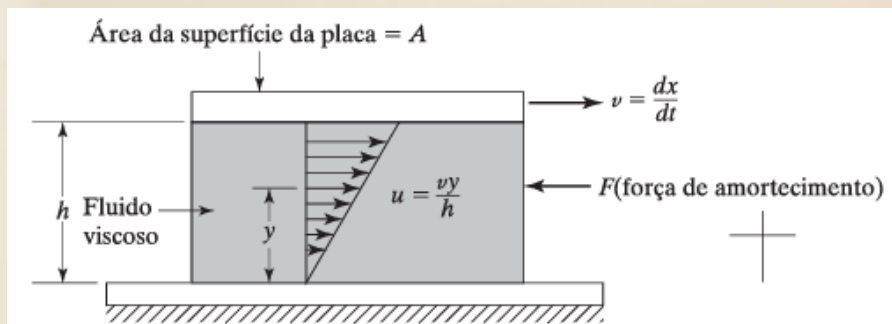
Solução do Exemplo

Aula 5

- A força de resistência F pode ser expressa como $F = c \cdot \dot{x}$, onde c é a constante de amortecimento e $\dot{x}$ a velocidade, portanto:

$$c = \frac{F}{\dot{x}} \longrightarrow c = \frac{400}{10} \longrightarrow c = 40 \text{ Ns/m}$$

- O mancal poder ser modelado como um amortecedor do tipo placa plana conforme mostrado na figura:



- Nessa situação, a tensão de cisalhamento desenvolvida na camada de fluido a uma distância y da placa fixa é dada por:

$$\tau = \mu \cdot \frac{du}{dy}$$

- Onde $du/dy = v/h$, representa o gradiente de velocidade. Portanto, a força de cisalhamento desenvolvida na superfície inferior da placa em movimento é calculada por:

$$\tau = \frac{F}{A} \longrightarrow F = \tau \cdot A \longrightarrow F = \mu \cdot \frac{du}{dy} \cdot A$$



Solução do Exemplo

Aula 5

- ✪ Considerando $v = \dot{x}$ e $du/dy = v/h$, a equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$F = \mu \cdot \frac{\dot{x}}{h} \cdot A$$

- ✪ Como $F = c \cdot \dot{x}$, pode-se escrever que:

$$c = \frac{F}{\dot{x}} \quad \longrightarrow \quad c = \frac{\mu \cdot \frac{\dot{x}}{h} \cdot A}{\dot{x}}$$

$$c = \frac{\mu \cdot \dot{x} \cdot A}{\dot{x} \cdot h} \quad \longrightarrow \quad c = \frac{\mu \cdot A}{h}$$

- ✪ Substituindo os valores numéricos:

$$c = \frac{\mu \cdot A}{h}$$

$$40 = \frac{0,3445 \cdot 0,1}{h}$$

$$h = \frac{0,3445 \cdot 0,1}{40}$$

$$h = 0,00086125 \text{ m}$$

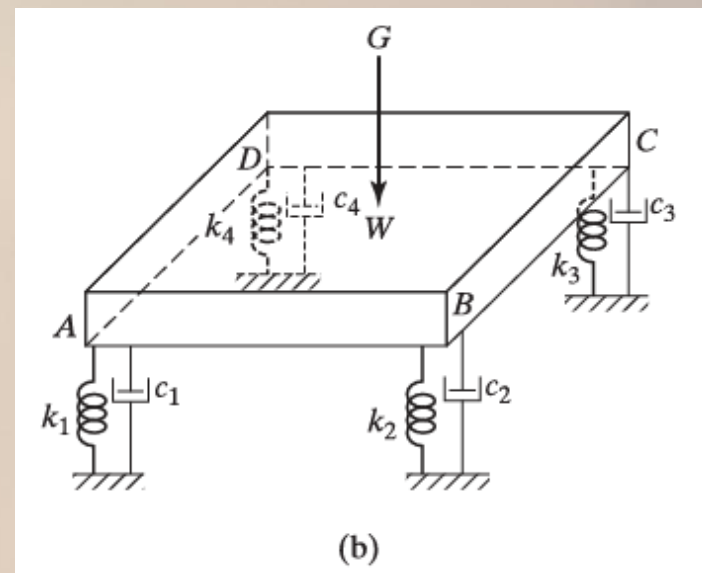
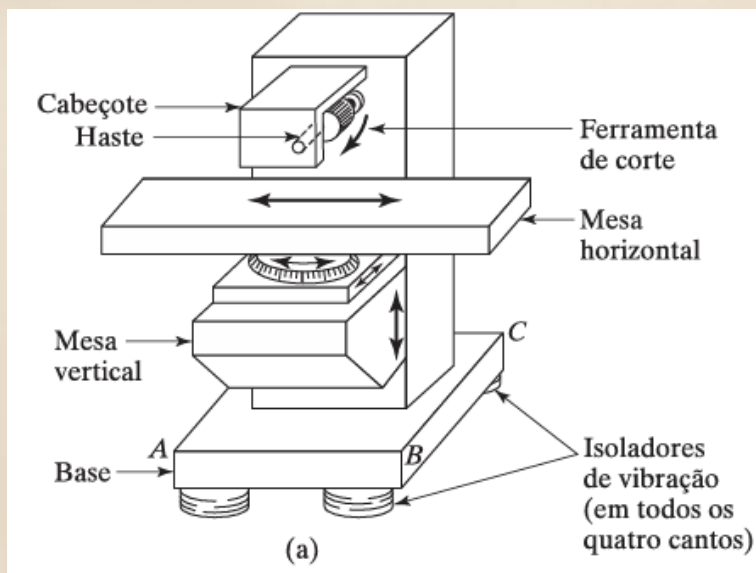
$$h = 0,86125 \text{ mm}$$



Exercícios Propostos

Aula 5

1. Uma fresadora de precisão está apoiada em quatro suportes isoladores de choque como mostrado na figura. A elasticidade e o amortecimento de cada isolador de choque podem ser modelados como uma mola e um amortecedor viscoso conforme mostrado. Determine a constante elástica equivalente, k_{eq} , e a constante de amortecimento equivalente, c_{eq} , do suporte da máquina ferramenta. Considere que o centro de massa G do suporte está localizado em uma posição simétrica aos quatro isoladores de vibração.



Obrigado Pela Atenção

Nos Encontramos na Próxima Aula





Aula - 6

Vibração Livre não Amortecida



Conteúdos Abordados Nessa Aula

Aula 6

-  Vibração Livre não Amortecida;
-  Sistema Massa-Mola
-  Sistemas com Um Grau de Liberdade;
-  Equações de Movimento.



Definição de Vibração

Aula 6

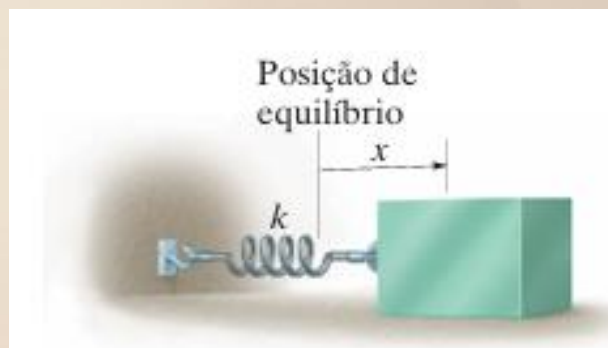
-  Vibração é todo movimento periódico de um corpo ou sistema de corpos interligados, em torno de uma posição de equilíbrio.
-  Em geral, há dois tipos de vibração, livre e forçada.
-  A vibração livre ocorre quando o movimento se mantém por forças restauradoras gravitacionais ou elásticas, como, por exemplo, O movimento de vai-e-vem de um pêndulo ou a vibração de uma barra elástica.
-  Uma vibração forçada é causada por uma força externa periódica ou intermitente aplicada ao sistema.
-  Ambos os tipos de vibração podem ser amortecidos ou não.



Vibração Livre Não Amortecida

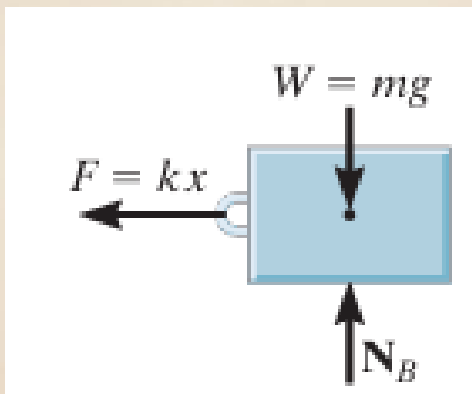
Aula 6

- 🌐 O tipo mais simples de movimento de vibração é o de vibração livre sem amortecimento representado pelo modelo mostrado na figura.
- 🌐 O bloco tem massa m e está ligado a uma mola de rigidez k . Um movimento de vibração ocorre quando o bloco é solto após ter sido deslocado para uma posição x , de modo que a mola, por estar deformada, puxa-o de volta.
- 🌐 O bloco atingirá uma velocidade tal que será capaz de ultrapassar a posição de equilíbrio $x = 0$, portanto o movimento adquirido, que será oscilatório, continuará indefinidamente, caso se considerem nulas as forças de atrito, como, por exemplo, no caso de uma superfície de apoio lisa.





- 🌐 O movimento dependente do tempo pode ser determinado aplicando-se a equação de movimento ao bloco considerado numa posição genérica x .
- 🌐 A figura mostra o diagrama de corpo livre. A força elástica restauradora, de intensidade $F = k \cdot x$, está sempre voltada para a posição de equilíbrio, enquanto a aceleração a é tomada genericamente com sentido positivo concordante com o do deslocamento. Ao observar que $a = d^2x/dt^2 = \ddot{x}$, temos:



$$\sum F_x = m \cdot a_x$$

$$-k \cdot x = m \cdot \ddot{x}$$



- 🌐 Observando que a aceleração é proporcional ao deslocamento do bloco. O movimento assim descrito é denominado movimento harmônico simples.

- 🌐 Após rearranjo, a equação anterior pode ser posta na “forma-padrão”:

$$-k \cdot x = m \cdot \ddot{x} \quad \longrightarrow \quad -\frac{k}{m} \cdot x = \ddot{x} \quad \longrightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

- 🌐 Conforme apresentado anteriormente, a frequência natural é dada por:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- 🌐 Portanto, pode-se escrever que:

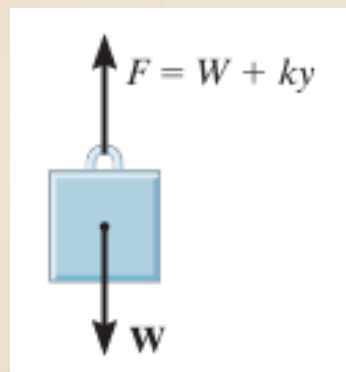
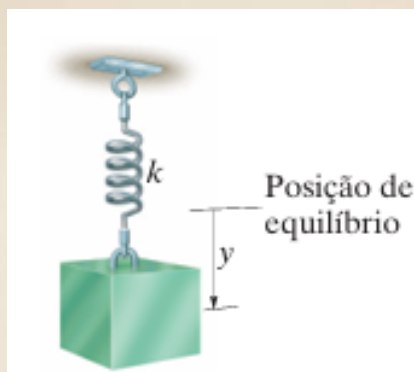
$$\ddot{x} + \omega_n^2 \cdot x = 0$$



Modelagem Matemática – Sistema Vertical

Aula 6

- 🌐 A equação padrão também pode ser obtida considerando-se o bloco suspenso e medindo-se o deslocamento y a partir da sua posição de equilíbrio.
- 🌐 Quando o bloco está em equilíbrio, a mola exerce nele uma força para cima de intensidade $F = W = m \cdot g$. Logo, quando o bloco é deslocado de uma distância y para baixo dessa posição, a intensidade da força da mola passa a ser $F = W + k \cdot y$. A aplicação da equação de movimento resulta em:



$$\sum F_y = m \cdot a_y$$

$$-W - k \cdot y + W = m \cdot \ddot{y}$$



$$-k \cdot y = m \cdot \ddot{y}$$

🌐 Portanto, pode-se escrever que:

$$\ddot{y} + \omega_n^2 \cdot y = 0$$



Frequência Natural de Vibração

Aula 6

- 🌐 A frequência natural de vibração é uma característica intrínseca de um sistema mecânico que define a taxa na qual ele tende a oscilar quando é perturbado de sua posição de equilíbrio e não sofre influência de forças externas contínuas.
- 🌐 Fisicamente, ela representa o número de oscilações completas que o sistema realiza por unidade de tempo em resposta a uma pequena perturbação, sendo determinada exclusivamente pelas propriedades inerciais e elásticas do conjunto, como a massa e a rigidez.
- 🌐 Quando um corpo é deslocado de sua posição de repouso e liberado, a energia potencial armazenada em seus elementos elásticos, como molas, converte-se em energia cinética associada ao movimento da massa, e esse processo de troca de energia ocorre em um ritmo específico, que é a frequência natural.



Frequência Natural de Vibração

Aula 6

- Essa frequência pode ser única para sistemas simples, como um oscilador massa-mola ideal, ou múltipla no caso de sistemas mais complexos, que possuem diversos modos de vibração.
- Na prática, conhecer a frequência natural é fundamental, pois quando o sistema é excitado por forças externas cuja frequência se aproxima desse valor, ocorre o fenômeno da ressonância, que pode amplificar drasticamente a amplitude das oscilações e causar falhas estruturais.
- Assim, a frequência natural não é apenas um parâmetro teórico, mas um aspecto físico fundamental que governa o comportamento dinâmico e a segurança de máquinas, estruturas e componentes mecânicos.



Solução da Equação Padrão

Aula 6

- 🌐 A equação padrão é uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem, com coeficientes constantes. Portanto, a solução geral desse tipo de equação é dada por:

$$x = A \cdot \text{sen } \omega_n \cdot t + B \cdot \cos \omega_n \cdot t$$

- 🌐 A e B são duas constantes de integração arbitrárias. A velocidade e a aceleração do bloco são determinadas por derivações temporais sucessivas, o que resulta em:

$$v = \dot{x} = A \cdot \omega_n \cdot \cos \omega_n \cdot t - B \cdot \omega_n \cdot \text{sen } \omega_n \cdot t$$

$$a = \ddot{x} = -A \cdot \omega_n^2 \cdot \text{sen } \omega_n \cdot t - B \cdot \omega_n^2 \cdot \cos \omega_n \cdot t$$

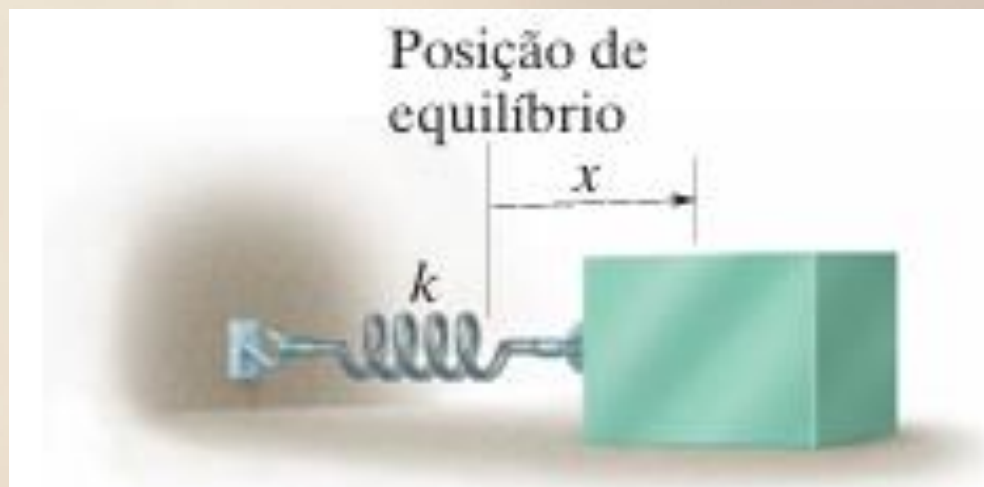
- 🌐 Verifica-se facilmente que quando as equações acima são substituídas na equação padrão, a equação diferencial é, de fato, satisfeita, mostrando que essas equações representam a solução da equação padrão.



Determinação das Constantes A e B

Aula 6

- As constantes arbitrárias A e B podem ser determinadas pelas condições iniciais do problema. Por exemplo, suponha que o bloco na figura tenha sido deslocado de uma distância x_1 para a direita de sua posição de equilíbrio e recebeu uma velocidade inicial v_1 para direita (v_1 positiva).





Determinação das Constantes A e B

Aula 6

Substituindo na equação do deslocamento $x = x_1$ para $t = 0$, obtemos $B = x_1$:

$$x = A \cdot \sen \omega_n \cdot t + B \cdot \cos \omega_n \cdot t \quad \longrightarrow \quad x_1 = A \cdot \sen \omega_n \cdot 0 + B \cdot \cos \omega_n \cdot 0$$

$$x_1 = A \cdot \sen 0 + B \cdot \cos 0 \quad \longrightarrow \quad x_1 = A \cdot 0 + B \cdot 1 \quad \longrightarrow \quad B = x_1$$

Como $v = v_1$ para $t = 0$, então, aplicando na equação da velocidade, chegamos a $A = v_1 / \omega_n$:

$$v = \dot{x} = A \cdot \omega_n \cdot \cos \omega_n \cdot t - B \cdot \omega_n \cdot \sen \omega_n \cdot t \quad \longrightarrow \quad v_1 = A \cdot \omega_n \cdot \cos \omega_n \cdot 0 - x_1 \cdot \omega_n \cdot \sen \omega_n \cdot 0$$

$$v_1 = A \cdot \omega_n \cdot \cos 0 - x_1 \cdot \omega_n \cdot \sen 0 \quad \longrightarrow \quad v_1 = A \cdot \omega_n \cdot 1 - x_1 \cdot \omega_n \cdot 0 \quad \longrightarrow \quad v_1 = A \cdot \omega_n \quad \longrightarrow \quad A = \frac{v_1}{\omega_n}$$

Com os valores de A e B determinados, a equação geral que descreve o movimento se torna:

$$x = A \cdot \sen \omega_n \cdot t + B \cdot \cos \omega_n \cdot t \quad \longrightarrow \quad x = \frac{v_1}{\omega_n} \cdot \sen \omega_n \cdot t + x_1 \cdot \cos \omega_n \cdot t$$



Forma Simplificada da Equação Geral

Aula 6

- 🌐 A equação geral também pode ser expressa de forma mais simples em termos de uma função seno. Para isso, considera-se $A = C \cdot \cos \emptyset$ e $B = C \cdot \sin \emptyset$, onde C e $\emptyset$ são duas novas constantes arbitrárias a serem determinadas no lugar de A e B . Substituindo essas expressões na equação do deslocamento, temos:

$$x = A \cdot \sin \omega_n \cdot t + B \cdot \cos \omega_n \cdot t$$

$$x = C \cdot \cos \emptyset \cdot \sin \omega_n \cdot t + C \cdot \sin \emptyset \cdot \cos \omega_n \cdot t$$

- 🌐 Usando a identidade trigonométrica $\sin(\theta + \emptyset) = \sin \theta \cdot \cos \emptyset + \cos \theta \cdot \sin \emptyset$, e considerando que $\theta = \omega_n \cdot t$, pode-se escrever que:

$$x = C \cdot \sin(\omega_n \cdot t + \emptyset)$$

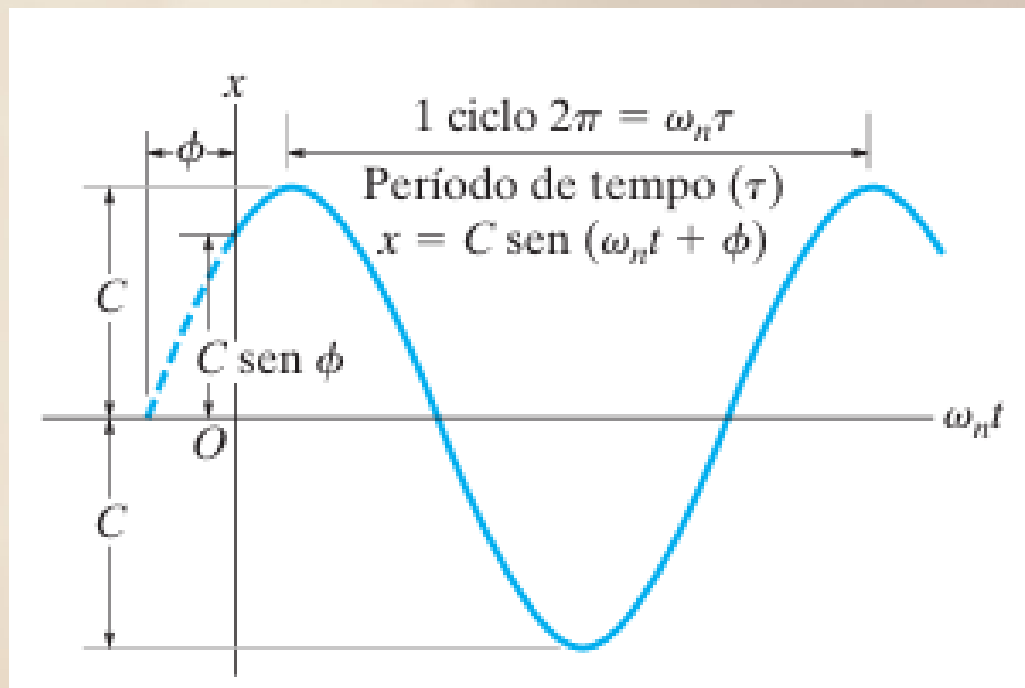


Representação Gráfica

Aula 6

Um gráfico x versus $\omega_n \cdot t$ para a equação geral pode ser visto na figura.

$$x = C \cdot \text{sen}(\omega_n \cdot t + \phi)$$





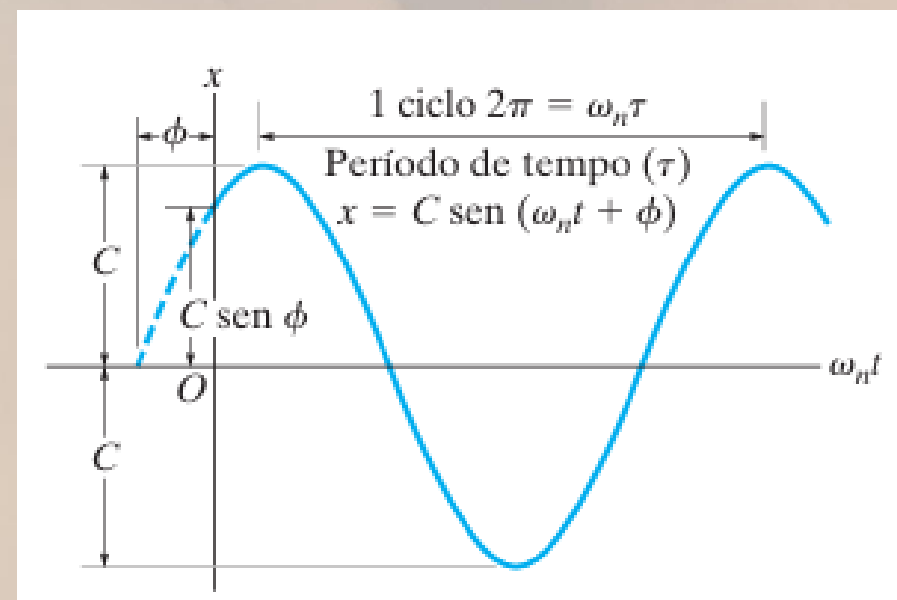
Representação Gráfica

Aula 6

- 🌐 O deslocamento máximo do bloco relativamente à sua posição de equilíbrio é denominado amplitude da vibração.
- 🌐 Pode-se ver tanto da figura quanto da equação geral que a amplitude é C .
- 🌐 O ângulo (ϕ) é chamado de ângulo de fase ou, mais apropriadamente, inicial, pois ele representa quanto a curva está deslocada em relação à origem no instante $t = 0$.
- 🌐 As constantes C e ϕ relacionam-se com A e B por meio das seguintes equações:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{B}{A}$$





Período e Frequência

Aula 6

- 🌐 Observe que a curva senoidal completa um ciclo num tempo $t = \tau$ quando $\omega_n \cdot \tau = 2 \cdot \pi$, ou seja:

$$\tau = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_n}$$

- 🌐 Esse tempo é denominado período, que também pode ser expresso como:

$$\tau = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

- 🌐 A frequência f é definida como o número de ciclos completos por unidade de tempo, sendo determinada pelo inverso do período, portanto:

$$f = \frac{\omega_n}{2 \cdot \pi}$$



$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$



- Quando um corpo ou sistema de corpos interligados sofre um deslocamento inicial a partir de sua posição de equilíbrio e, então, é abandonado, ele passa a vibrar com sua frequência natural.
- Se o corpo tem apenas um grau de liberdade, isto é, se sua posição pode ser especificada completamente por apenas uma coordenada, então o movimento de vibração do corpo terá as mesmas características do movimento harmônico simples do sistema bloco-mola discutido anteriormente.
- Consequentemente, o movimento do corpo será descrito por uma equação diferencial com a mesma 'forma-padrão', ou seja:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 \cdot x = 0$$

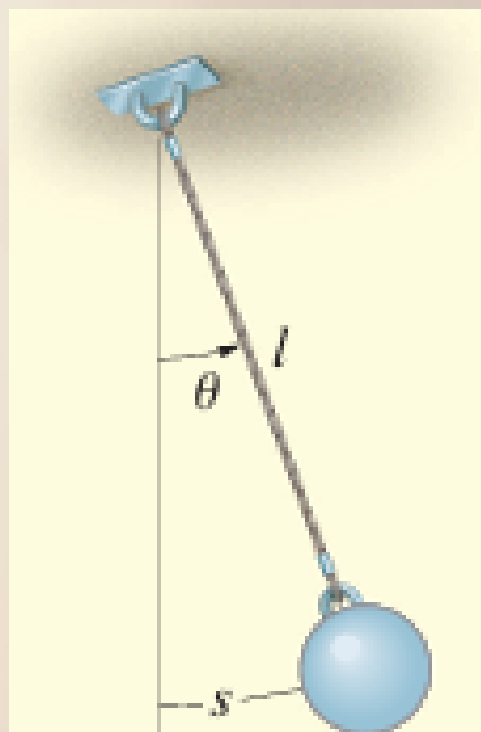
- Assim, se a pulsação natural ω_n do corpo for conhecida, o período da vibração τ , a frequência natural f e outras características do movimento de vibração do corpo poderão ser estabelecidos por meio das equações apresentadas.



Exemplo de Aplicação

Aula 6

- ☉ Determine o período de vibração para o pêndulo simples mostrado na figura. A esfera tem massa m e o fio, comprimento l . Despreze o tamanho da esfera e a massa do fio. Considere o fio inextensível.



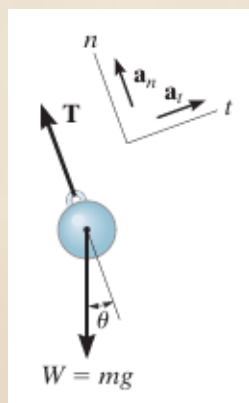
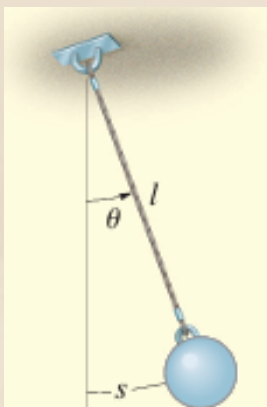


Solução do Exemplo

Aula 6

Diagrama de Corpo Livre:

-  O movimento do sistema será descrito por meio da coordenada de posição θ . Quando a esfera está deslocada de um ângulo θ , a força restauradora que age nela é dada pelo componente do peso $m \cdot g \cdot \sin \theta$. Além disso, a aceleração a_t tem o sentido de s (ou θ) crescente.



Equação de Movimento:

-  Aplicando a equação de movimento na direção tangencial, pois a força restauradora tem essa direção, obtemos:

$$\sum F_t = m \cdot a_t$$

$$-m \cdot g \cdot \sin \theta = m \cdot a_t \quad (I)$$

Cinemática:

-  Sabe-se que $a_t = d^2s/dt^2 = \ddot{s}$ e que a coordenada s está relacionada com a posição angular θ pela equação $s = l \cdot \theta$, de modo que $a_t = \ddot{s} = l \cdot \ddot{\theta}$.



Solução do Exemplo

Aula 6

- Assim, a equação (I) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$-m \cdot g \cdot \sin \theta = m \cdot a_t \quad \longrightarrow \quad -g \cdot \sin \theta = a_t$$

$$-g \cdot \sin \theta = l \cdot \ddot{\theta} \quad \longrightarrow \quad -\frac{g}{l} \cdot \sin \theta = \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \cdot \sin \theta = 0$$

- Para pequenos deslocamentos tem-se que $\sin \theta \approx \theta$, portanto, a equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \cdot \theta = 0$$

- Por comparação, verifica-se que a equação obtida possui a forma padrão:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 \cdot x = 0$$

- Portanto, a frequência natural de oscilação do pêndulo simples é:

$$\omega_n^2 = \frac{g}{l} \quad \longrightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

- O Período é dado por:

$$\tau = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_n} \quad \longrightarrow \quad \tau = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

- Esse resultado indica que o período depende somente do comprimento do fio, e não da massa da esfera ou do ângulo θ .



Exercícios Propostos

Aula 6

-  1. Uma mola tem rigidez de 600 N/m . Um bloco de 4 kg é preso à mola, empurrado 50 mm acima da sua posição de equilíbrio e solto a partir do repouso. Determine a equação que descreve o movimento do bloco. Suponha que os deslocamentos positivos sejam medidos para baixo.
-  2. Quando se prende um bloco de 3 kg com uma mola, esta se alonga 60 mm . Determine a frequência natural e o período de vibração para um bloco de $0,2 \text{ kg}$ ligado à mola.
-  3. Usa-se uma mola de rigidez $k = 80 \text{ N/m}$ para suspender um bloco de 8 kg . Se ao bloco for comunicada uma velocidade para cima de $0,4 \text{ m/s}$ quando este está 90 mm acima da sua posição de equilíbrio, determine a equação que descreverá o movimento do bloco e seu deslocamento máximo para cima, medido a partir da posição de equilíbrio. Suponha que os deslocamentos positivos sejam medidos para baixo.



Exercícios Propostos

Aula 6

4. Considere um bloco de 6 kg suspenso por uma mola de rigidez $k = 200 \text{ N/m}$. Comunica-se ao bloco uma velocidade de 0,4 m/s para cima quando este está 75 mm acima da sua posição de equilíbrio. Determine a equação que descreve o movimento do bloco e o seu deslocamento máximo para cima, medido a partir de sua posição de equilíbrio. Suponha que os deslocamentos positivos sejam medidos para baixo.
5. Suspende-se um bloco de 3 kg por uma mola de rigidez $k = 200 \text{ N/m}$. O peso é empurrado 50 mm para cima, a partir da sua posição de equilíbrio, e, então, é abandonado a partir do repouso. Determine a equação que descreve o movimento. Quais são a amplitude e a frequência natural de vibração? Suponha que os deslocamentos positivos sejam medidos para baixo.

Obrigado Pela Atenção

Nos Encontramos na Próxima Aula





Aula - 7

Vibração Livre não Amortecida



Conteúdos Abordados Nessa Aula

Aula 7

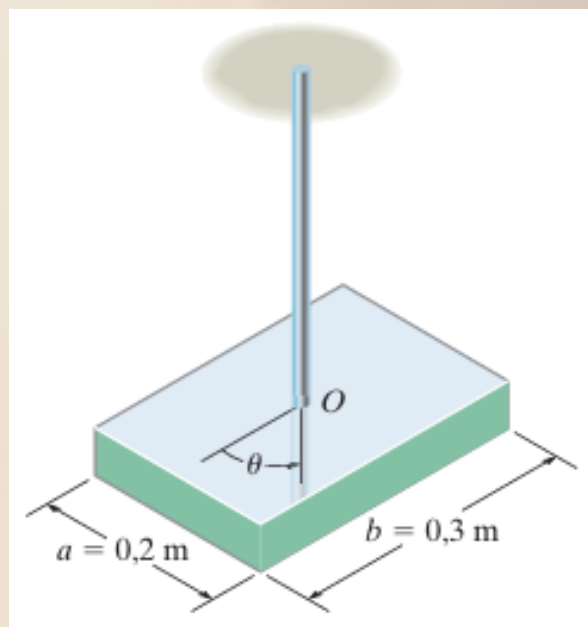
-  Vibração Livre não Amortecida;
-  Sistema Massa-Mola
-  Sistemas com Um Grau de Liberdade;
-  Solução de Exercícios.



Exemplo de Aplicação

Aula 7

- ☉ A placa retangular de 10 kg mostrada na figura está suspensa em seu centro por uma barra de rigidez torcional $k = 1,5 \text{ Nm/rad}$. Determine o período natural de vibração da placa quando aplica-se um pequeno deslocamento angular θ em seu próprio plano.



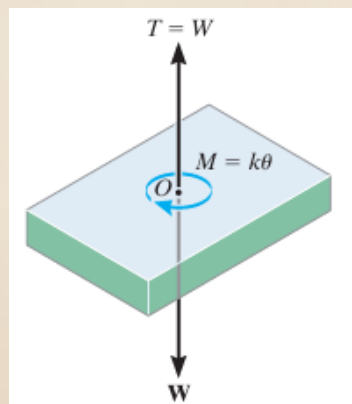
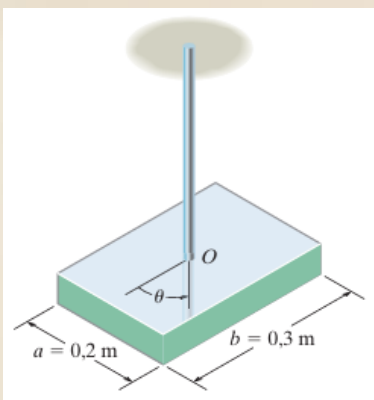


Solução do Exemplo

Aula 7

Diagrama de Corpo Livre:

-  Como a placa é deslocada em seu próprio plano, o momento torcional restaurador criado pela barra tem intensidade $M = k \cdot \theta$. Esse momento age no sentido oposto ao do deslocamento angular θ . O sentido convencionado para a aceleração angular $\ddot{\theta}$ é o de θ positivo.



Equação de Movimento:

$$\sum M_O = I_O \cdot \alpha \quad \longrightarrow \quad -k \cdot \theta = I_O \cdot \ddot{\theta}$$

$$-\frac{k}{I_O} \cdot \theta = \ddot{\theta} \quad \longrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{k}{I_O} \cdot \theta = 0$$

-  Como essa equação está na forma-padrão, pode-se escrever que:

$$\ddot{\theta} + \omega_n^2 \cdot \theta = 0$$

 Portanto:

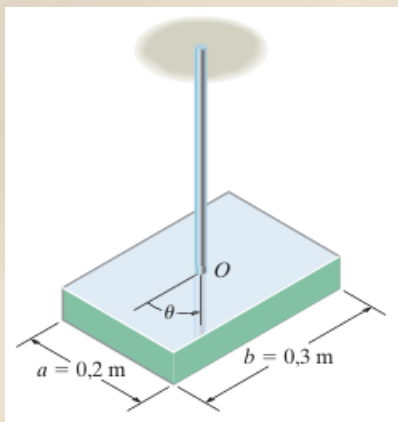
$$\omega_n^2 = \frac{k}{I_O} \quad \longrightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{I_O}}$$



Solução do Exemplo

Aula 7

- 🌐 O momento de inércia da placa em relação ao eixo coincidente com a barra é dado por:



$$I_O = \frac{1}{12} \cdot m \cdot (a^2 + b^2)$$

$$I_O = \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot (0,2^2 + 0,3^2)$$

$$I_O = 0,108 \text{ kg m}^2$$

- 🌐 O Período é dado por:

$$\tau = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_n} \quad \rightarrow \quad \tau = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{\frac{k}{I_O}}}$$

$$\tau = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I_O}{k}}$$

$$\tau = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{0,108}{1,5}}$$

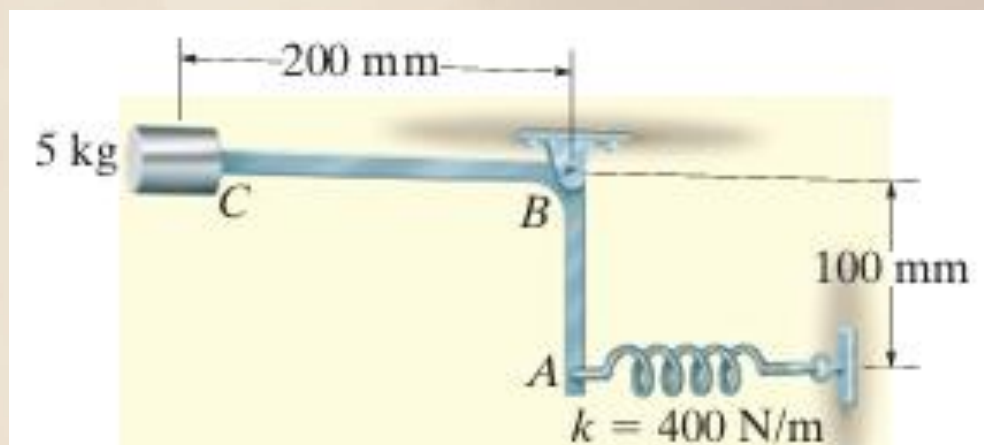
$$\tau = 1,69 \text{ s}$$



Exemplo de Aplicação

Aula 7

- ☉ A barra curva mostrada na figura tem massa desprezível e suporta um cursor de 5 kg em sua extremidade. Determine o período natural de vibração para o sistema.





Solução do Exemplo

Aula 7

Diagramas de Corpo Livre e Dinâmico:

- Desloca-se a barra em um pequeno ângulo θ em relação à sua posição de equilíbrio.

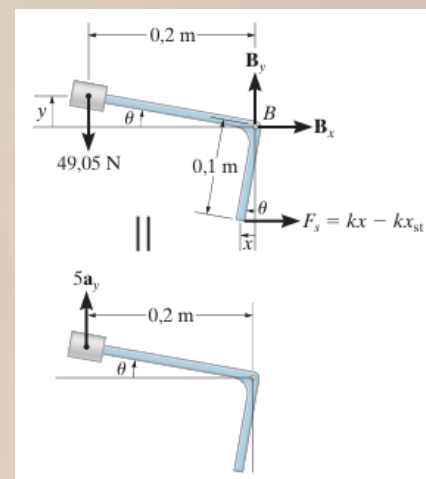
Como a mola apresenta uma compressão inicial x_{st} para satisfazer a condição de equilíbrio, quando o deslocamento $x > x_{st}$ a mola exerce na barra uma força:

$$F_s = k \cdot x - k \cdot x_{st}$$

- Para obter a forma-padrão, $5 \cdot a_y$ deve atuar para cima, estando de acordo com o deslocamento positivo θ .

Equação de Movimento:

- Os momentos serão somados em relação ao ponto B a fim de se eliminar a reação desconhecida nesse ponto. Considerando que θ é pequeno, pode-se escrever que:



$$\sum M_B = \sum (\mu_k)_B$$

$$k \cdot x \cdot 0,1 - k \cdot x_{st} \cdot 0,1 + 49,05 \cdot 0,2 = -5 \cdot a_y \cdot 0,2$$



Solução do Exemplo

Aula 7

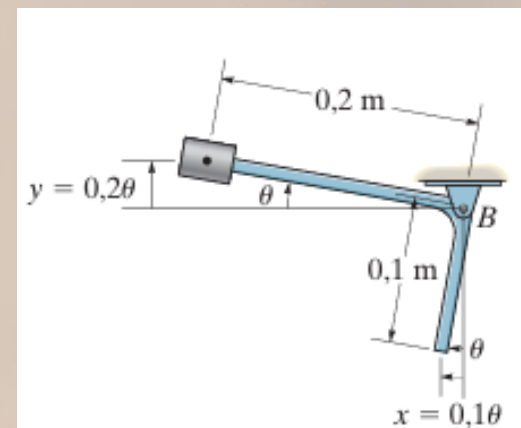
- 🌐 O segundo termo no primeiro membro dessa equação, $-k \cdot x_{st} \cdot 0,1$, representa o momento criado pela força da mola necessária para manter o cursor em equilíbrio, isto é, em $x = 0$. Esse momento tem a mesma intensidade do momento $49,05 \cdot 0,2$ criado pelo peso do cursor, de forma que esses dois momentos se cancelam por terem sentidos opostos. Assim, a equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$k \cdot x \cdot 0,1 - k \cdot x_{st} \cdot 0,1 + 49,05 \cdot 0,2 = -5 \cdot a_y \cdot 0,2$$

$$k \cdot x \cdot 0,1 = -5 \cdot a_y \cdot 0,2$$

🌐 Cinemática:

- 🌐 As posições da mola e do cursor podem ser relacionadas com o ângulo θ . Uma vez que θ é pequeno, $x = 0,1 \cdot \theta$ e $y = 0,2 \cdot \theta$. Portanto, $a_y = \ddot{y} = 0,2 \cdot \ddot{\theta}$. Substituindo esses resultados na equação anterior, temos:



$$400 \cdot (0,1 \cdot \theta) \cdot 0,1 = -5 \cdot (0,2 \cdot \ddot{\theta}) \cdot 0,2$$



Solução do Exemplo

Aula 7

- 🌐 A equação obtida pode ser reescrita na forma padrão da seguinte maneira:

$$400 \cdot (0,1 \cdot \theta) \cdot 0,1 = -5 \cdot (0,2 \cdot \ddot{\theta}) \cdot 0,2$$

$$4 \cdot \theta = -0,2 \cdot \ddot{\theta}$$

$$-\frac{4}{0,2} \cdot \theta = \ddot{\theta}$$

$$-20 \cdot \theta = \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + 20 \cdot \theta = 0$$

- 🌐 Por comparação, verifica-se que a equação obtida possui a forma padrão:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 \cdot x = 0$$

- 🌐 Portanto, a frequência natural de oscilação do sistema é:

$$\omega_n^2 = 20 \longrightarrow \omega_n = \sqrt{20} \longrightarrow \omega_n = 4,47 \text{ rad/s}$$

- 🌐 O Período é dado por:

$$\tau = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_n} \longrightarrow \tau = \frac{2 \cdot \pi}{4,47}$$

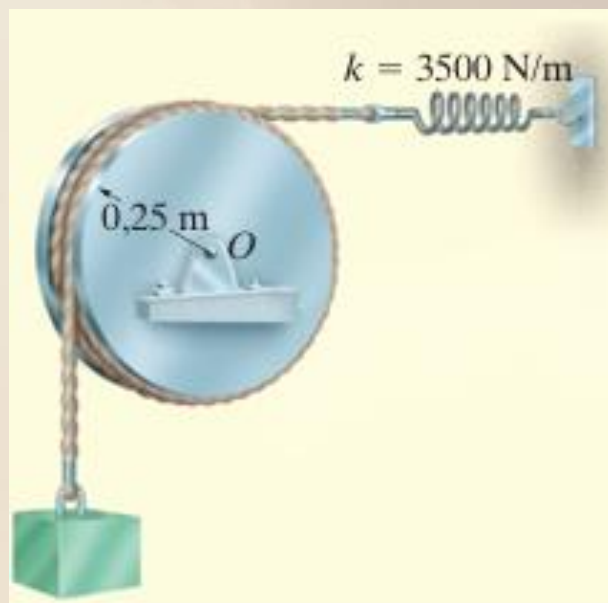
$$\tau = 1,40 \text{ s}$$



Exemplo de Aplicação

Aula 7

- Um bloco de 5 kg está suspenso por uma corda que passa sobre um disco de 7,5 kg, como mostra a figura. A mola tem rigidez $k = 3500 \text{ N/m}$. Determine o período natural de vibração para o sistema.





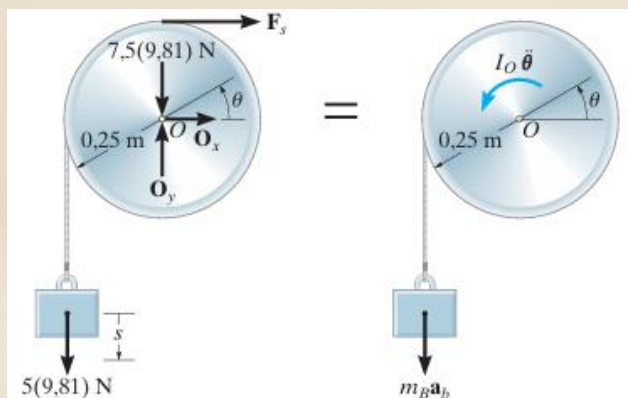
Solução do Exemplo

Aula 7

Diagramas de Corpo Livre e Dinâmico:

- ☉ O sistema consiste no disco, que sofre uma rotação definida pelo ângulo θ , e o bloco, que se translada de s .

O vetor $I_O \cdot \ddot{\theta}$ tem o sentido correspondente a θ positivo e, conseqüentemente, $m_B \cdot a_b$ tem o sentido (para baixo) correspondente a s positivo.



Equação de Movimento:

- ☉ Somando os momentos em relação ao ponto O para eliminar as reações O_x e O_y , e considerando para o disco que $I_O = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$, pode-se escrever que:

$$\sum M_O = \sum (\mu_k)_O$$

$$5 \cdot 9,81 \cdot 0,25 - F_s \cdot 0,25 = I_O \cdot \ddot{\theta} + 5 \cdot a_b \cdot 0,25$$

$$5 \cdot 9,81 \cdot 0,25 - F_s \cdot 0,25 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot \ddot{\theta} + 5 \cdot a_b \cdot 0,25$$

$$5 \cdot 9,81 \cdot 0,25 - F_s \cdot 0,25 = \frac{1}{2} \cdot 7,5 \cdot 0,25^2 \cdot \ddot{\theta} + 5 \cdot a_b \cdot 0,25$$

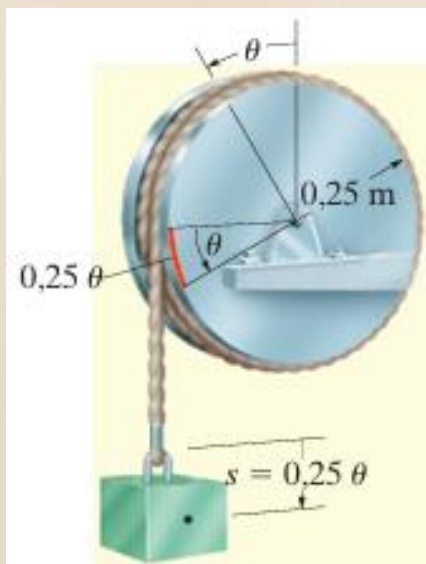


Solução do Exemplo

Aula 7

Cinemática:

-  Como mostra o diagrama cinemático na figura, um pequeno deslocamento positivo θ do disco corresponde um deslocamento do bloco para baixo $s = 0,25 \cdot \theta$; logo, $a_b = \ddot{s} = 0,25 \cdot \ddot{\theta}$.



-  Quando $\theta = 0^\circ$, a força da mola necessária ao equilíbrio do disco tem uma intensidade de $5 \cdot 9,81 = 49,05$ N e age para a direita. Para a posição θ , a força da mola é $F_s = 3500 \cdot 0,25 \cdot \theta + 5 \cdot 9,81$ N. Substituindo esses resultados na equação anterior, obtemos:

$$5 \cdot 9,81 \cdot 0,25 - F_s \cdot 0,25 = \frac{1}{2} \cdot 7,5 \cdot 0,25^2 \cdot \ddot{\theta} + 5 \cdot a_b \cdot 0,25$$

$$12,26 - F_s \cdot 0,25 = 0,2344 \cdot \ddot{\theta} + 1,25 \cdot a_b$$

$$12,26 - (875 \cdot \theta + 49,05) \cdot 0,25 = 0,2344 \cdot \ddot{\theta} + 1,25 \cdot a_b$$

$$12,26 - 218,75 \cdot \theta - 12,26 = 0,2344 \cdot \ddot{\theta} + 1,25 \cdot 0,25 \cdot \ddot{\theta}$$

$$-218,75 \cdot \theta = 0,2344 \cdot \ddot{\theta} + 0,3125 \cdot \ddot{\theta}$$



Solução do Exemplo

Aula 7

- 🌐 A equação obtida pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$-218,75 \cdot \theta = 0,5469 \cdot \ddot{\theta}$$

$$-\frac{218,75}{0,5469} \cdot \theta = \ddot{\theta}$$

$$-400 \cdot \theta = \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + 400 \cdot \theta = 0$$

- 🌐 Por comparação, verifica-se que a equação obtida possui a forma padrão:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 \cdot x = 0$$

- 🌐 Portanto, a frequência natural de oscilação do sistema é:

$$\omega_n^2 = 400 \quad \longrightarrow \quad \omega_n = \sqrt{400} \quad \longrightarrow \quad \omega_n = 20 \text{ rad/s}$$

- 🌐 O Período é dado por:

$$\tau = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_n} \quad \longrightarrow \quad \tau = \frac{2 \cdot \pi}{20}$$

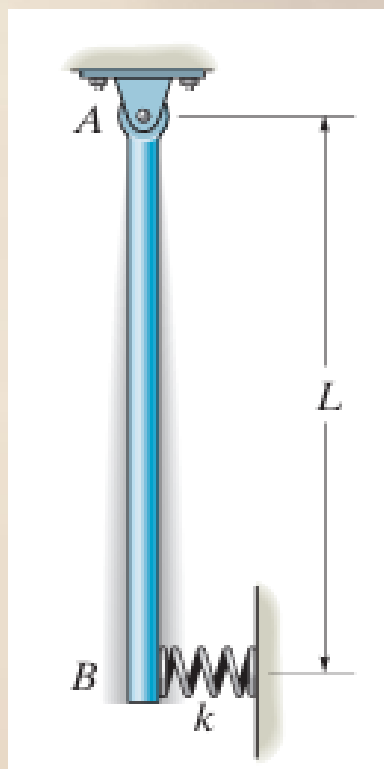
$$\tau = 0,314 \text{ s}$$



Exercícios Propostos

Aula 7

1. A barra uniforme de massa m é apoiada por um pino em A e uma mola em B . Se B recebe um pequeno deslocamento de lado e é solto, determine o período natural de vibração.

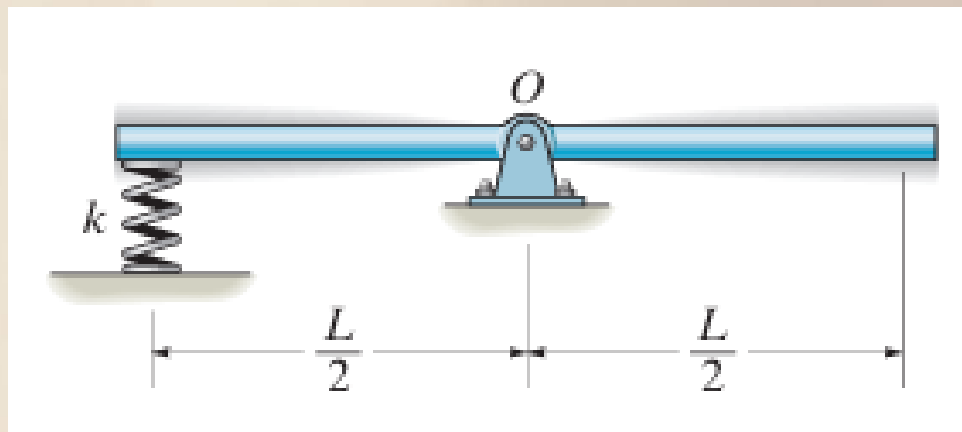




Exercícios Propostos

Aula 7

2. Determine o período natural de vibração da barra uniforme de massa m quando ela é deslocada ligeiramente para baixo e solta.

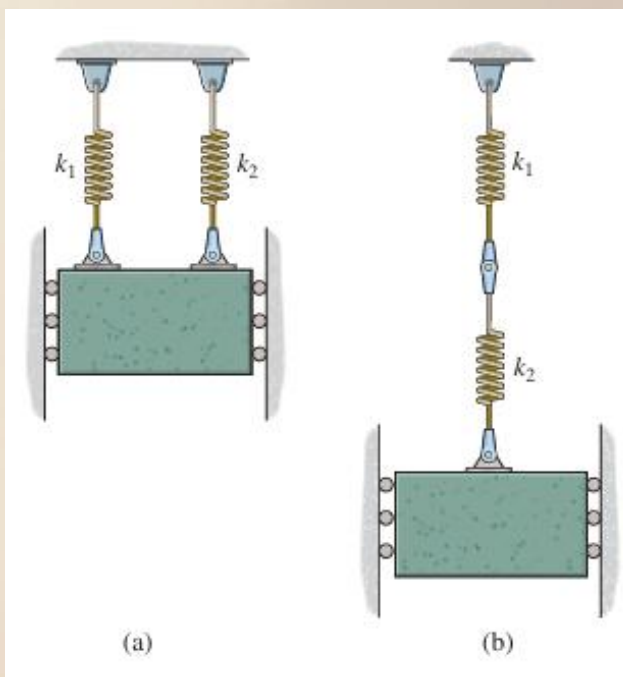




Exercícios Propostos

Aula 7

3. O bloco de 15 kg é suspenso por duas molas com diferentes rigidezes e arrumadas (a) em paralelo uma à outra e (b) em série. Se os períodos naturais de oscilação do sistema paralelo e do sistema em série forem observados como sendo 0,5 s e 1,5 s, respectivamente, determine as rigidezes k_1 e k_2 das molas.

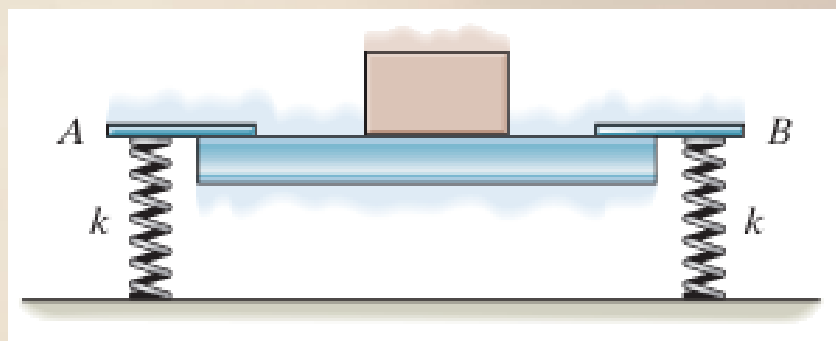




Exercícios Propostos

Aula 7

4. Uma barra uniforme é suportada em suas duas extremidades pelas molas A e B , cada uma com uma rigidez k . O período de vibração vertical da barra quando nada se apoia nela é de $0,83$ s. Seu período se altera para $1,52$ s, quando se coloca sobre seu centro uma massa de 50 kg. Calcule a rigidez de cada mola e a massa da barra.

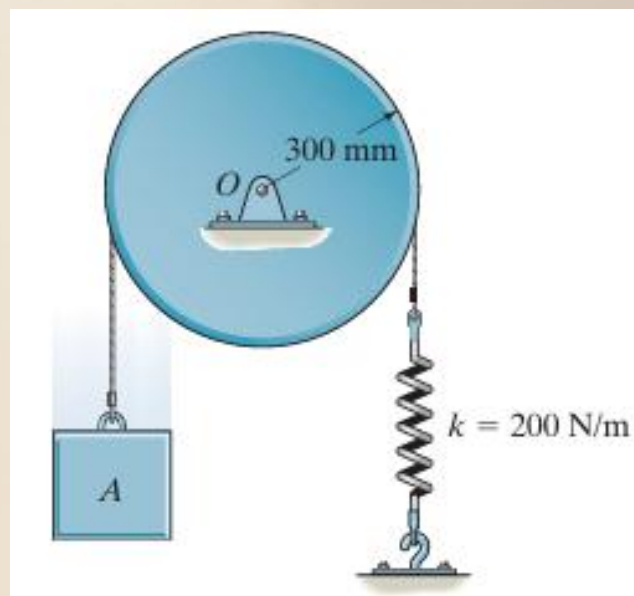




Exercícios Propostos

Aula 7

5. O disco de 20 kg é preso por um pino em seu centro de massa O e apoia o bloco A de 4 kg. Se a correia que passa em volta do disco não desliza em sua superfície de contato, determine o período natural de vibração do sistema.



Obrigado Pela Atenção

Nos Encontramos na Próxima Aula





Aula - 8

Vibração Livre não Amortecida



Conteúdos Abordados Nessa Aula

Aula 8

-  Vibração Livre não Amortecida;
-  Sistema Massa-Mola;
-  Sistemas com Um Grau de Liberdade;
-  Solução de Exercícios.



Exemplo de Aplicação

Aula 8

✈ A coluna da caixa d'água mostrada na figura possui 100 m de altura e é feita de concreto reforçado com uma seção transversal tubular com 2,5 m de diâmetro interno e 3,1 m de diâmetro externo. Quando cheia, a massa da caixa d'água é de 3×10^5 kg. Desprezando a massa da coluna e admitindo $E = 27,58$ GPa, determine:

- A) A Frequência natural e o período natural transversal de vibração da caixa.
- B) A resposta de vibração da caixa d'água resultante de um deslocamento transversal inicial de 0,25 m.
- C) Os valores máximos da velocidade e da aceleração experimentados pela caixa d'água.



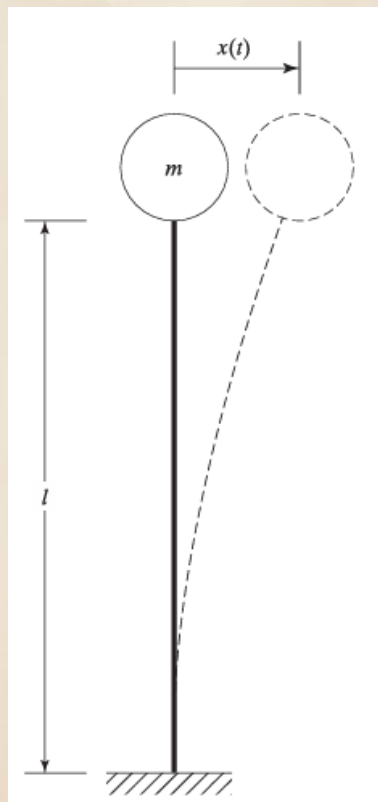


Solução do Exemplo

Aula 8

🌐 Analogia do Sistema:

🌐 Admitindo que a caixa d'água seja uma massa pontual, que a coluna tenha uma seção transversal uniforme de massa desprezível, o sistema pode ser modelado como uma viga em balanço com uma carga concentrada na extremidade livre, conforme mostrado na figura.



🌐 Para essa situação, a deflexão é dada por:

$$\delta = \frac{P \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

🌐 A rigidez da viga é dada por:

$$P = k \cdot \delta \quad \longrightarrow \quad k = \frac{P}{\delta} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{l^3}$$

🌐 Sabe-se que o momento de inércia da seção transversal tubular é:

$$I = \frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4) \quad \longrightarrow \quad I = \frac{\pi}{64} \cdot (3,1^4 - 2,5^4)$$

$$I = 2,616 \text{ m}^4$$



Solução do Exemplo

Aula 8

Assim, a rigidez é:

$$k = \frac{P}{\delta} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{l^3} \longrightarrow k = \frac{3 \cdot 27,58 \cdot 10^9 \cdot 2,616}{100^3}$$

$$k = 216447,84 \text{ N/m}$$

Portanto, a frequência natural de oscilação do sistema é:

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \longrightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{216447,84}{300000}} \longrightarrow \omega_n = 0,849 \text{ rad/s}$$

O Período é dado por:

$$\tau = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_n} \longrightarrow \tau = \frac{2 \cdot \pi}{0,849} \longrightarrow \tau = 7,40 \text{ s}$$

B) Resposta de vibração do sistema:

Considerando o deslocamento inicial $x_0 = 0,25 \text{ m}$, e a velocidade inicial $\dot{x}_0 = 0$, a resposta harmônica do sistema pode ser expressa por:

$$x = A \cdot \sin \omega_n \cdot t + B \cdot \cos \omega_n \cdot t$$



Solução do Exemplo

Aula 8

- Considerando o deslocamento inicial $x_0 = 0,25$ m, e a velocidade inicial $\dot{x}_0 = 0$, a resposta harmônica do sistema pode ser expressa por:

$$x = A \cdot \sin(\omega_n \cdot t) + B \cdot \cos(\omega_n \cdot t)$$

- As constantes A e B , são:

$$A = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \quad B = x_0$$

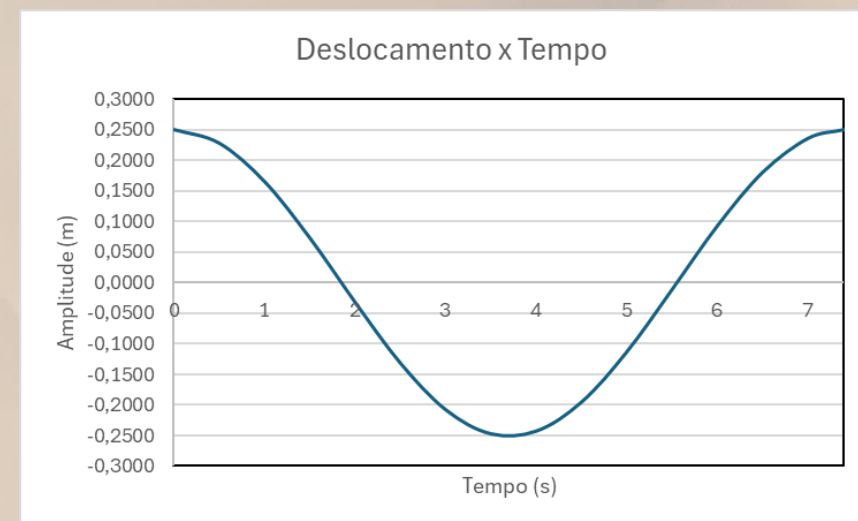
- Aplicado as condições de contorno iniciais, a equação que define a resposta harmônica do sistema é dada por:

$$x = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \cdot \sin(\omega_n \cdot t) + x_0 \cdot \cos(\omega_n \cdot t)$$

$$x = \frac{0}{0,849} \cdot \sin(0,849 \cdot t) + 0,25 \cdot \cos(0,849 \cdot t)$$

$$x = 0,25 \cdot \cos(0,849 \cdot t) \text{ m}$$

- Gráfico do Deslocamento:



$$x_{\text{máx}} = 0,25 \text{ m}$$



Solução do Exemplo

Aula 8

🌐 C) Módulo da Velocidade e Aceleração Máxima:

🌐 Derivando a equação do deslocamento, obtém-se a equação da velocidade:

$$\dot{x}_0 = 0,25 \cdot \cos(0,849 \cdot t) \cdot \frac{d}{dt}$$

🌐 A partir das regras de derivada, tem-se que:

$$\cos(\omega_n \cdot t) \cdot \frac{d}{dt} = -\omega_n \cdot \sin(\omega_n \cdot t)$$

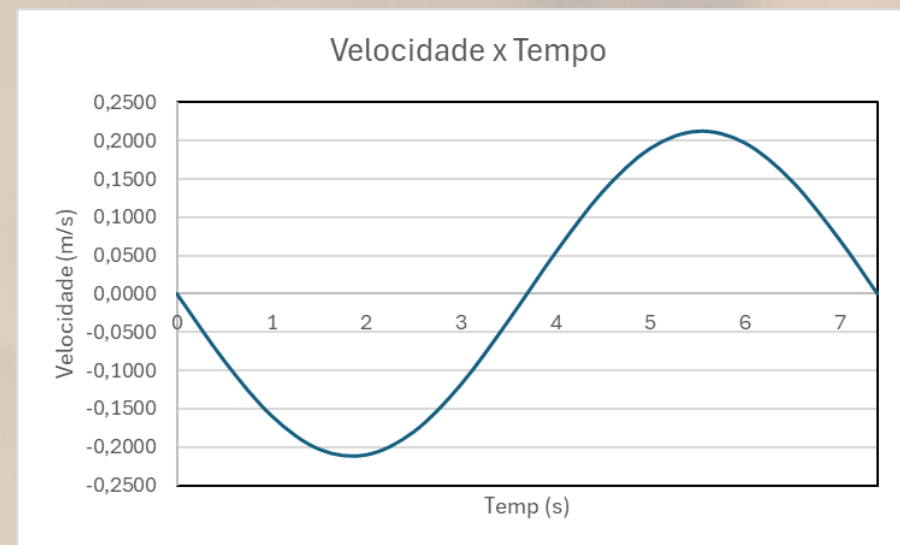
🌐 Portanto:

$$\dot{x}_0 = -0,25 \cdot [-\omega_n \cdot \sin(\omega_n \cdot t)]$$

$$\dot{x}_0 = -0,25 \cdot [-0,849 \cdot \sin(0,849 \cdot t)]$$

$$\dot{x}_0 = -0,21225 \cdot \sin(0,849 \cdot t) \text{ m/s}$$

🌐 Gráfico da Velocidade:



$$\dot{x}_{m\acute{a}x} = 0,21225 \text{ m/s}$$



Solução do Exemplo

Aula 8

- Derivando a equação da velocidade, obtém-se a equação da aceleração:

$$\ddot{x}_0 = -0,21225 \cdot \text{sen}(0,849 \cdot t) \cdot \frac{d}{dt}$$

- A partir das regras de derivada, tem-se que:

$$\text{sen}(\omega_n \cdot t) \cdot \frac{d}{dt} = \omega_n \cdot \cos(\omega_n \cdot t)$$

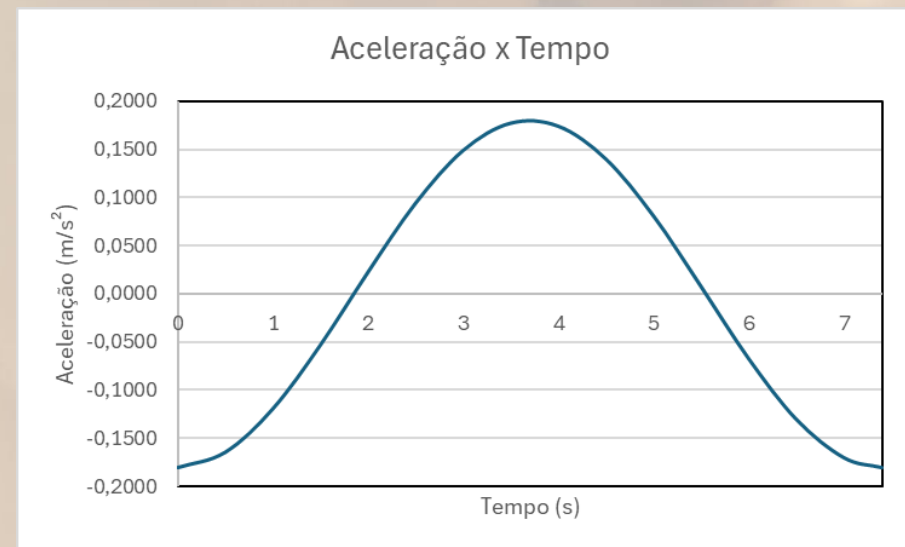
- Portanto:

$$\ddot{x}_0 = -0,21225 \cdot [\omega_n \cdot \cos(\omega_n \cdot t)]$$

$$\ddot{x}_0 = -0,21225 \cdot [0,849 \cdot \cos(0,849 \cdot t)]$$

$$\ddot{x}_0 = -0,1802 \cdot \cos(0,849 \cdot t) \text{ m/s}^2$$

- Gráfico da Aceleração:



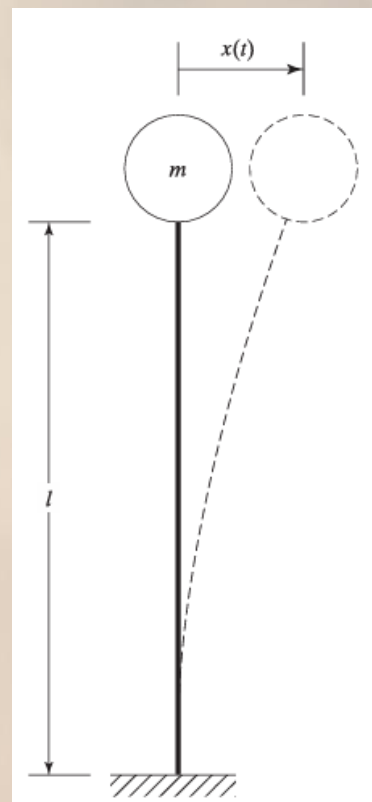
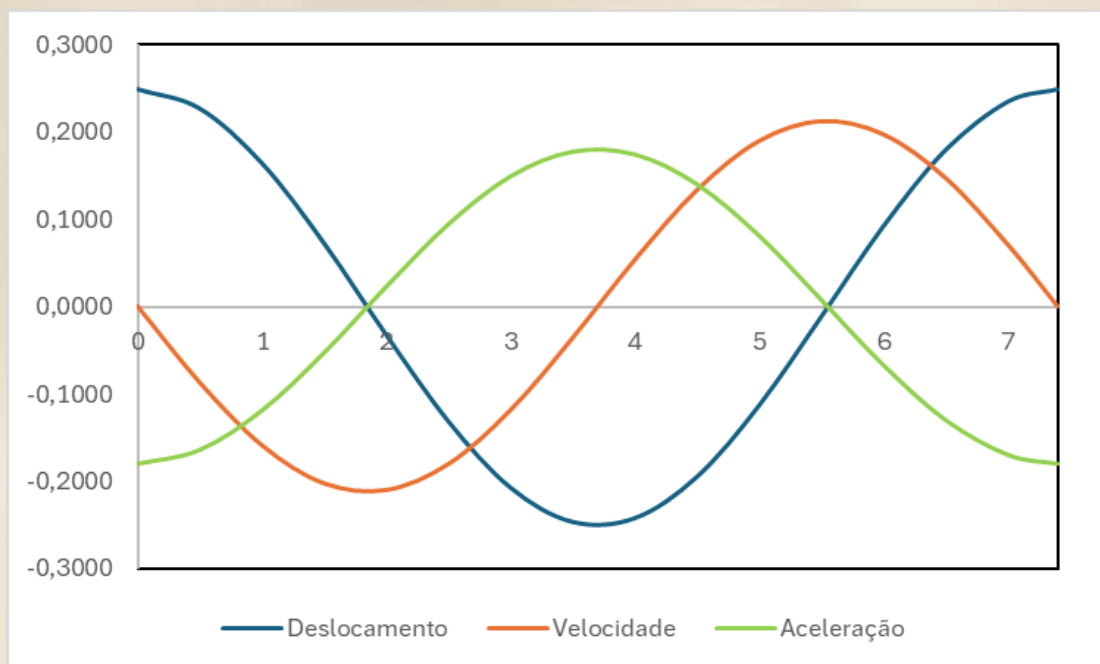
$$\ddot{x}_{\text{máx}} = 0,1802 \text{ m/s}^2$$



Solução do Exemplo

Aula 8

Gráficos Sobrepostos:



Análise dos Gráficos:

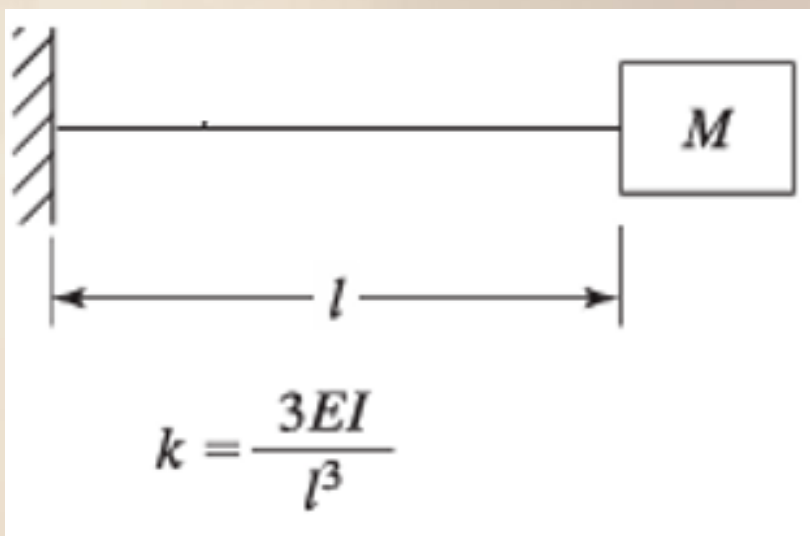
1. Nos instantes de máxima amplitude do movimento, a velocidade é igual a zero e a aceleração é máxima.
2. Nos instantes de amplitude igual a zero (eixo central do movimento vibratório), a velocidade é máxima e a aceleração é igual a zero.



Exemplo de Aplicação

Aula 8

- ☉ Uma viga em balanço suporta uma massa M em sua extremidade livre como mostrado na imagem. Considere que uma massa m cai de uma altura h sobre a massa M e adere a ela sem ricochetejar. Determine a equação que define a vibração transversal resultante da viga.





Solução do Exemplo

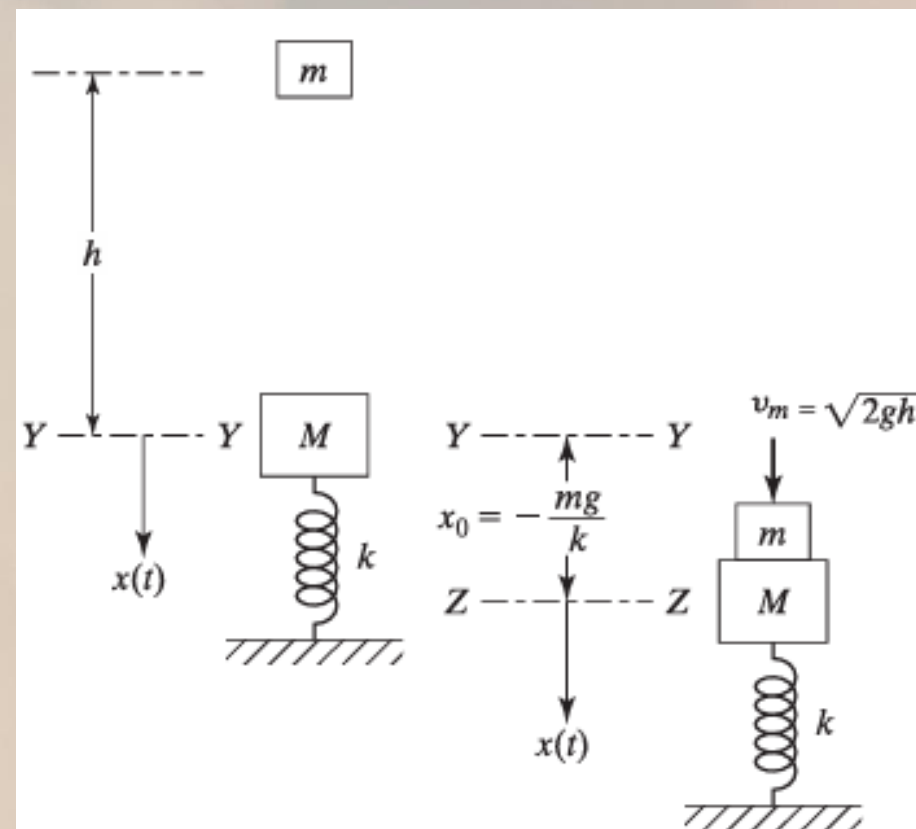
Aula 8

Quando a massa m cai de uma altura h , ela atinge a massa M com uma velocidade de queda livre dada por $v_m = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$. Como a massa m adere à massa M sem ricochetear, a velocidade da massa combinada ($M+m$) imediatamente após o impacto $\dot{x}_0$ pode ser determinada utilizando o princípio da quantidade de movimento.

$$m \cdot v_m = (M + m) \cdot \dot{x}_0$$

$$\dot{x}_0 = \left(\frac{m}{M + m} \right) \cdot v_m$$

$$\dot{x}_0 = \left(\frac{m}{M + m} \right) \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$





Solução do Exemplo

Aula 8

- ✈ A posição de equilíbrio estático da viga com a nova massa $(M+m)$ está localizada a uma distância de $m \cdot g/k$ abaixo da posição de equilíbrio da massa original M . Para essa situação, a rigidez da viga em balanço é dada por:

$$k = \frac{3 \cdot E \cdot I}{l^3}$$

- ✈ Como a vibração livre da viga com a nova massa $(M+m)$, ocorre em relação a sua posição de equilíbrio original, as condições de contorno iniciais do problema são dadas por:

$$x_0 = -\frac{m \cdot g}{l^3} \quad \dot{x}_0 = \left(\frac{m}{M+m} \right) \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

- ✈ Assim, a equação geral simplificada para a vibração transversal livre resultante pode ser expressa da seguinte forma:

$$x = C \cdot \text{sen}(\omega_n \cdot t + \phi)$$

- ✈ A amplitude é dada por:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$A = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} = \frac{\left(\frac{m}{M+m} \right) \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}}{\omega_n}$$

$$B = x_0 = -\frac{m \cdot g}{l^3}$$



Solução do Exemplo

Aula 8

 Portanto:

$$C = \sqrt{\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2 + x_0^2}$$

$$C = \sqrt{\left(\frac{\left(\frac{m}{M+m}\right) \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}}{\omega_n}\right)^2 + \left(-\frac{m \cdot g}{l^3}\right)^2}$$

 O ângulo de fase é dado por:

$$\phi = \tan^{-1} \frac{B}{A} \quad \rightarrow \quad \phi = \tan^{-1} \frac{x_0}{\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{x_0 \cdot \omega_n}{\dot{x}_0}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{\left(-\frac{m \cdot g}{l^3}\right) \cdot \omega_n}{\left(\frac{m}{M+m}\right) \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}} \right]$$

 A frequência natural será:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{(M+m)}}$$

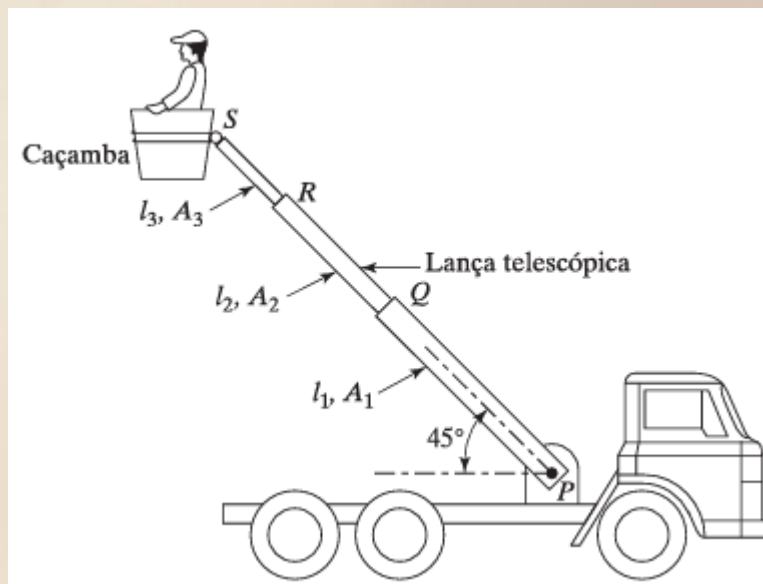
$$\omega_n = \sqrt{\frac{3 \cdot E \cdot I}{l^3 \cdot (M+m)}}$$



Exemplo de Aplicação

Aula 8

- ☉ A caçamba de um caminhão de bombeiros está localizada na extremidade de uma lança telescópica, como mostrado na figura. A caçamba mais o bombeiro possuem uma massa igual a 200 kg. Determine a frequência natural de vibração da caçamba no sentido vertical. Dados: $E = 2,1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, $I_1 = I_2 = I_3 = 3 \text{ m}$, $A_1 = 20 \text{ cm}^2$, $A_2 = 10 \text{ cm}^2$ e $A_3 = 5 \text{ cm}^2$.





Solução do Exemplo

Aula 8

 Rigidez Equivalente:

 Como os elementos da lança telescópica do caminhão de bombeiros estão associados em série, a rigidez equivalente pode ser determinada da seguinte forma:

$$\frac{1}{k_b} = \frac{1}{k_{b1}} + \frac{1}{k_{b2}} + \frac{1}{k_{b3}}$$

 Sendo a rigidez de cada trecho da lança calculada por:

$$k_{bi} = \frac{A_i \cdot E_i}{l_i}$$

 Aplicando os valores numéricos fornecidos:

$$k_{b1} = \frac{A_1 \cdot E_1}{l_1} = \frac{(20 \cdot 10^{-4}) \cdot (2,1 \cdot 10^{11})}{3}$$

$$k_{b1} = 14 \cdot 10^7 \text{ N/m}$$

$$k_{b2} = \frac{A_2 \cdot E_2}{l_2} = \frac{(10 \cdot 10^{-4}) \cdot (2,1 \cdot 10^{11})}{3}$$

$$k_{b2} = 7 \cdot 10^7 \text{ N/m}$$

$$k_{b3} = \frac{A_3 \cdot E_3}{l_3} = \frac{(5 \cdot 10^{-4}) \cdot (2,1 \cdot 10^{11})}{3}$$

$$k_{b3} = 3,5 \cdot 10^7 \text{ N/m}$$



Solução do Exemplo

Aula 8

Portanto, a rigidez equivalente do sistema será:

$$\frac{1}{k_b} = \frac{1}{k_{b1}} + \frac{1}{k_{b2}} + \frac{1}{k_{b3}}$$
$$\frac{1}{k_b} = \frac{1}{14 \cdot 10^7} + \frac{1}{7 \cdot 10^7} + \frac{1}{3,5 \cdot 10^7}$$

$$\frac{1}{k_b} = \left(\frac{1}{14} + \frac{1}{7} + \frac{1}{3,5} \right) \cdot \frac{1}{10^7}$$

$$\frac{1}{k_b} = \left(\frac{1 + 2 + 4}{14} \right) \cdot \frac{1}{10^7}$$

$$\frac{1}{k_b} = \left(\frac{7}{14} \right) \cdot \frac{1}{10^7} \rightarrow \frac{1}{k_b} = \left(\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{10^7}$$

$$\frac{1}{k_b} = \frac{1}{2 \cdot 10^7} \rightarrow k_b = 2 \cdot 10^7 \text{ N/m}$$

A rigidez da lança telescópica no sentido vertical será dada por:

$$k = k_b \cdot \cos 45^\circ \rightarrow k = 2 \cdot 10^7 \cdot \cos 45^\circ$$

$$k = 2 \cdot 10^7 \cdot 0,707 \rightarrow k = 1,414 \cdot 10^7 \text{ N/m}$$

A frequência natural de vibração da caçamba no sentido vertical será:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{1,414 \cdot 10^7}{200}}$$

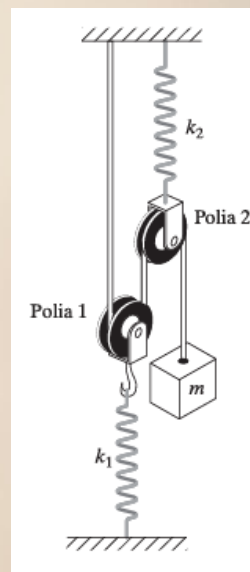
$$\omega_n = 265,89 \text{ rad/s}$$



Exercícios Propostos

Aula 8

1. Uma viga simplesmente apoiada com seção transversal quadrada de 5 mm e comprimento de 1 m suporta uma massa de 2,3 kg em seu ponto médio e possui uma frequência natural de vibração transversal de 30 rad/s. Determine o módulo de elasticidade da viga.
2. Determine a frequência natural de vibração do sistema mostrado na figura. Admita que as polias não tenham atrito e que a massa seja desprezível.



Obrigado Pela Atenção

Nos Encontramos na Próxima Aula





Aula - 9

Vibração Livre não Amortecida



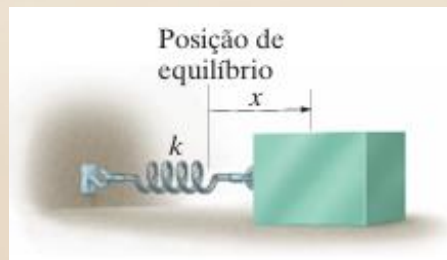
Conteúdos Abordados Nessa Aula

Aula 9

-  Vibração Livre não Amortecida;
-  Sistema Massa-Mola;
-  Sistemas com Um Grau de Liberdade;
-  Métodos de Energia.



- ✈ O movimento harmônico simples de um corpo, se deve somente a forças restauradoras gravitacionais e elásticas que agem no corpo.
- ✈ Como essas forças são conservativas, também é possível usar a equação da conservação da energia para se obter a frequência ou o período natural de vibração.
- ✈ Para mostrar como obter essas quantidades, considere novamente o bloco e a mola mostrados na figura. Quando o bloco em movimento ocupa a posição x medida a partir da posição de equilíbrio, a energia cinética é $T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2$ e a sua energia potencial é $V = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$. Pela conservação da energia, temos:



$$T + V = \text{Constante}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \text{Constante}$$



Equação Padrão do Sistema não Amortecido

Aula 9

- ☉ A equação diferencial que descreve o movimento acelerado do bloco pode ser deduzida derivando-se a equação anterior, em relação ao tempo, portanto:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \text{Constante} \quad \longrightarrow \quad 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x} \cdot \ddot{x} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot k \cdot x \cdot \dot{x} = 0$$

$$m \cdot \dot{x} \cdot \ddot{x} + k \cdot x \cdot \dot{x} = 0 \quad \longrightarrow \quad \dot{x} \cdot (m \cdot \ddot{x} + k \cdot x) = 0$$

- ☉ Como a velocidade em um sistema vibratório não é sempre nula, a solução requer que $(m \cdot \ddot{x} + k \cdot x) = 0$, ou seja, o resultado recai novamente na equação em sua forma padrão:

$$(m \cdot \ddot{x} + k \cdot x) = 0 \quad \longrightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m} \cdot x \quad \longrightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

$$\ddot{x} + \omega_n^2 \cdot x = 0$$

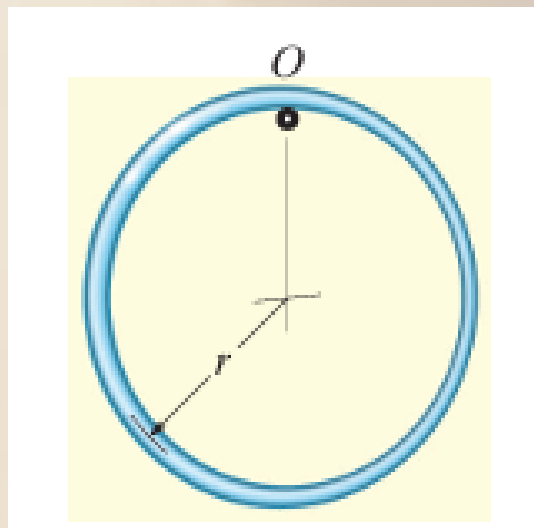
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



Exemplo de Aplicação

Aula 9

- 🌐 O anel delgado mostrado na figura apoia-se em um pino em O . Sabendo-se que a energia total do sistema vibratório é dada por $T + V = m \cdot r^2 \cdot \dot{\theta}^2 - m \cdot g \cdot r \cdot \cos \theta = \text{Constante}$, Determine o período natural de oscilação para pequenas amplitudes. A massa do anel é m .





Solução do Exemplo

Aula 9

 Equação da Energia:

$$T + V = m \cdot r^2 \cdot \dot{\theta}^2 - m \cdot g \cdot r \cdot \cos \theta = \text{Constante}$$

$$m \cdot r^2 \cdot \dot{\theta}^2 - m \cdot g \cdot r \cdot \cos \theta = \text{Constante}$$

 Derivando-se a equação, tem-se que:

$$m \cdot r^2 \cdot 2 \cdot \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} + m \cdot g \cdot r \cdot \sin \theta \cdot \dot{\theta} = 0$$

$$m \cdot r \cdot \dot{\theta} \cdot (2 \cdot r \cdot \ddot{\theta} + g \cdot \sin \theta) = 0$$

 Como a velocidade em um sistema vibratório não é sempre nula, a solução requer que:

$$(2 \cdot r \cdot \ddot{\theta} + g \cdot \sin \theta) = 0$$

 Para pequenos deslocamentos tem-se que $\sin \theta \approx \theta$, portanto, a equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$(2 \cdot r \cdot \ddot{\theta} + g \cdot \theta) = 0$$

$$2 \cdot r \cdot \ddot{\theta} = -g \cdot \theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{2 \cdot r} \cdot \theta$$

 Resultando em:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{2 \cdot r} \cdot \theta = 0$$



Solução do Exemplo

Aula 9

- ✈ Por comparação, verifica-se que a equação obtida possui a forma padrão:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{2 \cdot r} \cdot \theta = 0 \quad \longrightarrow \quad \ddot{\theta} + \omega_n^2 \cdot \theta = 0$$

- ✈ Portanto, a frequência natural de oscilação do sistema é:

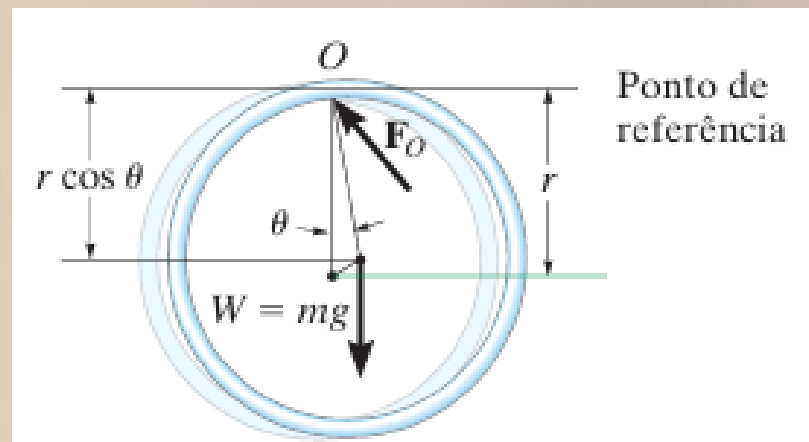
$$\omega_n^2 = \frac{g}{2 \cdot r}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{2 \cdot r}}$$

- ✈ O Período é dado por:

$$\tau = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_n}$$

$$\tau = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot r}{g}}$$

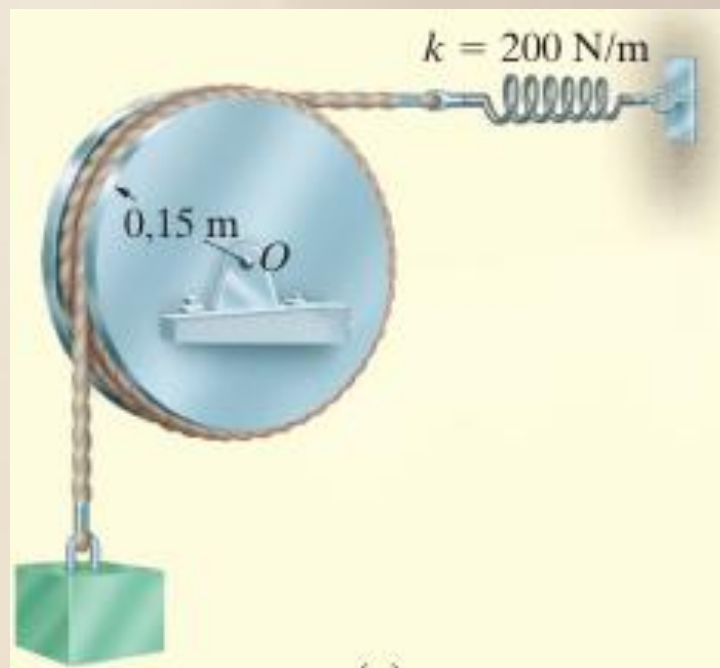




Exemplo de Aplicação

Aula 9

- Um bloco de 10 kg está suspenso por uma corda enrolada na periferia de um disco de 5 kg, como mostra a figura. Se a mola tem rigidez $k = 200 \text{ N/m}$, determine o período natural de vibração para o sistema.



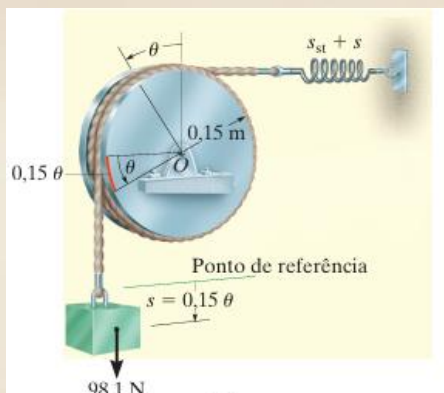


Solução do Exemplo

Aula 9

Equação da Energia:

A figura mostra um diagrama do bloco e disco quando eles estão deslocados de s e θ em relação a suas posições de equilíbrio, respectivamente. Como $s = 0,15 \cdot \theta$, tem-se que $v_b = \dot{s} = 0,15 \cdot \dot{\theta}$, assim, a energia cinética do sistema é:



$$T = \frac{1}{2} \cdot m_b \cdot v_b^2 + \frac{1}{2} \cdot I_O \cdot \omega_d^2$$

$$I_O = \frac{1}{2} \cdot m_d \cdot r^2$$

$$\omega_d = \dot{\theta}$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot m_b \cdot v_b^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot m_d \cdot r^2 \right) \cdot \dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (0,15 \cdot \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 0,15^2 \right) \cdot \dot{\theta}^2$$

$$T = 0,1125 \cdot \dot{\theta}^2 + 0,028125 \cdot \dot{\theta}^2$$

$$T = 0,1406 \cdot \dot{\theta}^2$$

Estabelecendo a referência na posição de equilíbrio do bloco e observando que a mola se alonga s_{st} para obter o equilíbrio, podemos escrever a seguinte expressão para a energia potencial:

$$V = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 - W \cdot s = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (s_{st} + s)^2 - W \cdot s$$



Solução do Exemplo

Aula 9

$$V = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot (s_{st} + (0,15 \cdot \theta))^2 - 98,1 \cdot 0,15 \cdot \theta$$

$$V = 100 \cdot (s_{st} + (0,15 \cdot \theta))^2 - 14,715 \cdot \theta$$

✈ Portanto, a energia total do sistema será:

$$T + V = \text{Constante}$$

$$0,1406 \cdot \dot{\theta}^2 + 100 \cdot (s_{st} + (0,15 \cdot \theta))^2 - 14,715 \cdot \theta = \text{Constante}$$

✈ A derivada da equação resulta em:

$$2 \cdot 0,1406 \cdot \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} + 2 \cdot 100 \cdot (s_{st} + 0,15 \cdot \theta) \cdot 0,15 \cdot \dot{\theta} - 14,715 \cdot \dot{\theta} = 0$$

$$0,2812 \cdot \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} + 200 \cdot (s_{st} + 0,15 \cdot \theta) \cdot 0,15 \cdot \dot{\theta} - 14,715 \cdot \dot{\theta} = 0$$



Solução do Exemplo

Aula 9

Como $s_{st} = W_b/k = 98,1/200 = 0,4905$, a equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$0,2812 \cdot \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} + 200 \cdot (0,4905 + 0,15 \cdot \theta) \cdot 0,15 \cdot \dot{\theta} - 14,715 \cdot \dot{\theta} = 0$$

$$0,2812 \cdot \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} + (98,1 + 30 \cdot \theta) \cdot 0,15 \cdot \dot{\theta} - 14,715 \cdot \dot{\theta} = 0$$

$$0,2812 \cdot \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} + 14,715 \cdot \dot{\theta} + 4,5 \cdot \theta \cdot \dot{\theta} - 14,715 \cdot \dot{\theta} = 0$$

$$0,2812 \cdot \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} + 4,5 \cdot \theta \cdot \dot{\theta} = 0$$

$$\dot{\theta} \cdot (0,2812 \cdot \ddot{\theta} + 4,5 \cdot \theta) = 0$$

Como a velocidade angular do disco, $\dot{\theta}$, não é sempre zero, a solução requer que:

$$(0,2812 \cdot \ddot{\theta} + 4,5 \cdot \theta) = 0$$



Solução do Exemplo

Aula 9

$$0,2812 \cdot \ddot{\theta} = -4,5 \cdot \theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{4,5}{0,2812} \cdot \theta$$

$$\ddot{\theta} = -16 \cdot \theta$$

$$\ddot{\theta} + 16 \cdot \theta = 0$$

 Por comparação, verifica-se que a equação obtida possui a forma padrão:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 \cdot x = 0$$

 Portanto, a frequência natural de oscilação do sistema é:

$$\omega_n^2 = 16$$

$$\omega_n = \sqrt{16}$$

$$\omega_n = 4 \text{ rad/s}$$

 O Período é dado por:

$$\tau = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_n}$$

$$\tau = \frac{2 \cdot \pi}{4}$$

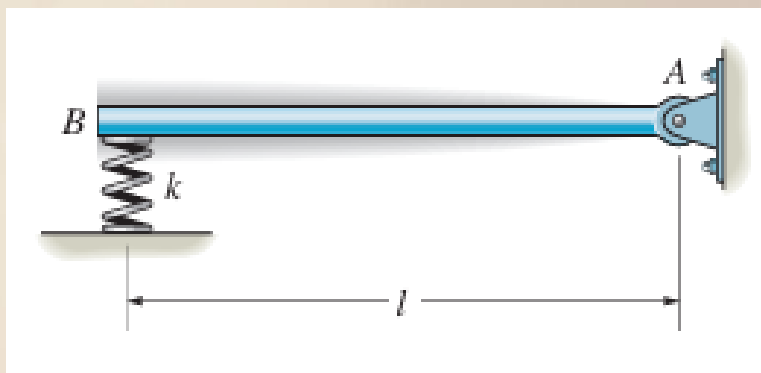
$$\tau = 1,57 \text{ s}$$



Exercícios Propostos

Aula 9

1. A barra uniforme de massa m é suportada por um pino em A e uma mola em B . Se a extremidade B sofre um pequeno deslocamento para baixo e é solta, determine o período natural de vibração.

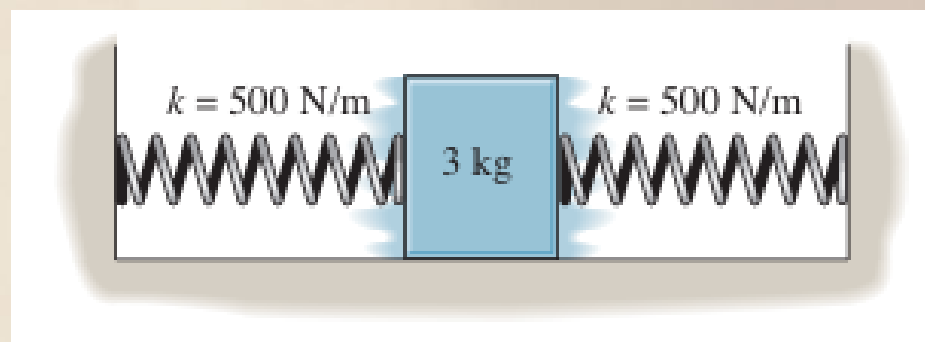




Exercícios Propostos

Aula 9

2. Determine a equação diferencial de movimento do bloco de 3 kg que é ligeiramente deslocado e solto a seguir. A superfície é lisa e as molas estão inicialmente não deformadas.

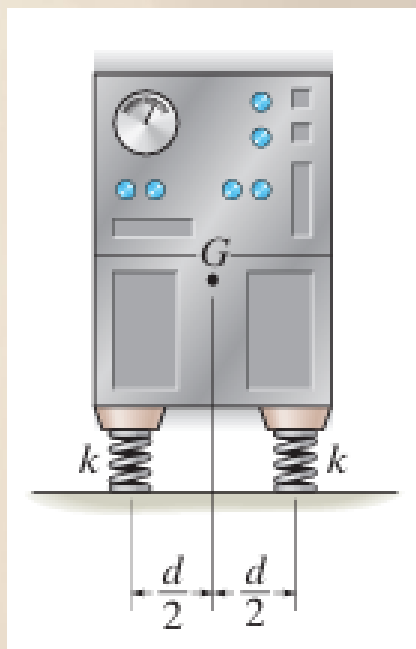




Exercícios Propostos

Aula 9

3. A máquina tem massa m e está suportada uniformemente por quatro molas, cada uma com rigidez k . Determine o período natural de vibração vertical.

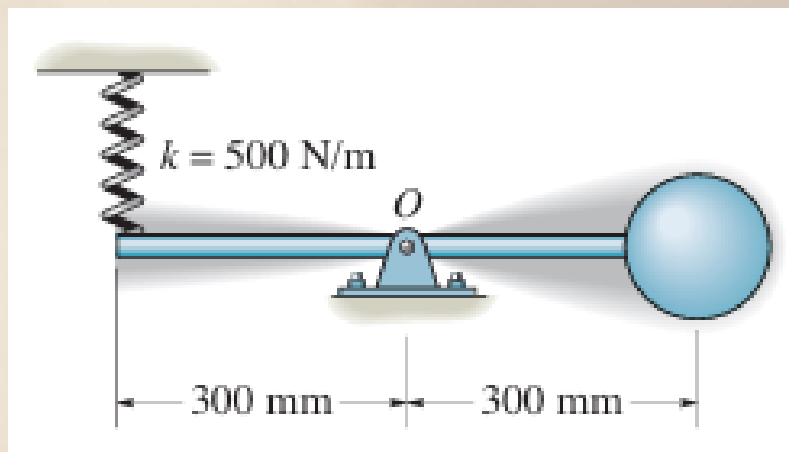




Exercícios Propostos

Aula 9

4. Determine o período natural de vibração da esfera de 3 kg. Despreze a massa da barra e o tamanho da esfera.

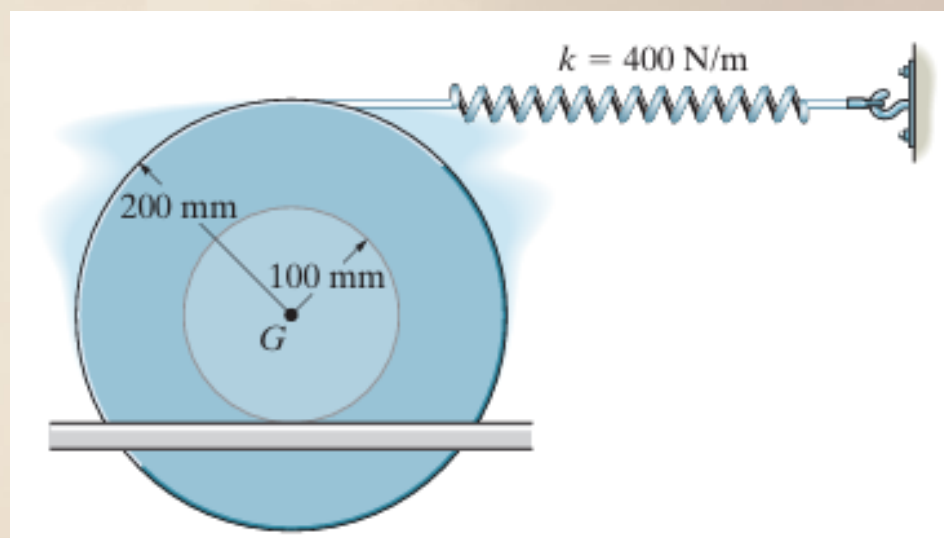




Exercícios Propostos

Aula 9

5. Determine a equação diferencial de movimento da bobina de 3 kg. Suponha que, durante as oscilações, ela não escorregue na superfície de contato. O raio de giração da bobina em relação ao seu centro de massa é $K_c = 125$ mm.



Obrigado Pela Atenção

Nos Encontramos na Próxima Aula





Aula - 10

Vibração Forçada não Amortecida



Conteúdos Abordados Nessa Aula

Aula 10

-  Vibração Forçada não Amortecida;
-  Sistema Massa-Mola;
-  Sistemas com Um Grau de Liberdade;



Definição de Vibração Forçada não Amortecida

Aula 10

- ✈ Considera-se a vibração forçada não amortecida um dos tipos mais importantes de movimento vibratório em trabalhos de engenharia.
- ✈ Os princípios que descrevem a natureza desse movimento podem ser usados para se analisarem as forças que causam vibração em muitos tipos de máquina e estruturas.



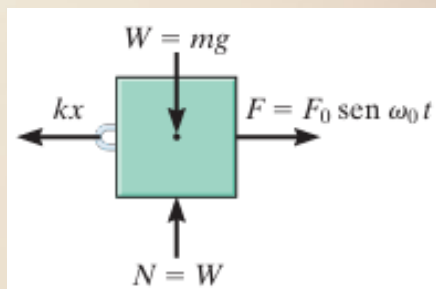
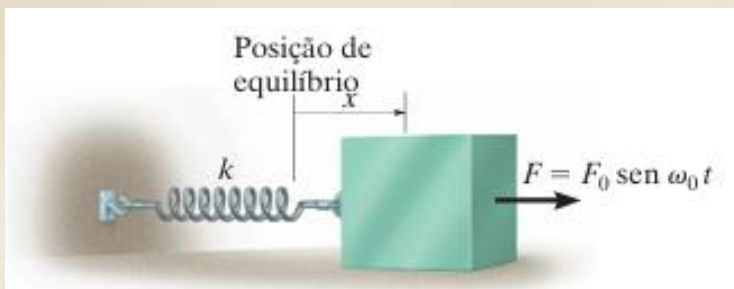
Mesas vibradoras fornecem uma vibração forçada e são usadas para separar materiais granulares.



Equação para Força Periódica

Aula 10

- ❷ O bloco e mola mostrados na figura são um modelo conveniente para representar as características vibratórias de um sistema submetido a uma força periódica $F = F_0 \cdot \text{sen}(\omega_0 \cdot t)$. Essa força tem amplitude F_0 e frequência angular ω .
- ❷ A figura mostra o diagrama de corpo livre para o bloco deslocado de uma distância x . A aplicação da equação de movimento resulta em:



$$F_0 \cdot \text{sen}(\omega_0 \cdot t) - k \cdot x = m \cdot \ddot{x}$$

$$\frac{F_0}{m} \cdot \text{sen}(\omega_0 \cdot t) - \frac{k}{m} \cdot x = \ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = \frac{F_0}{m} \cdot \text{sen}(\omega_0 \cdot t)$$

- ❷ Essa equação é uma equação diferencial de segunda ordem não homogênea, cuja solução geral consiste em uma solução “complementar”, x_c mais uma solução particular, x_p .



Solução Complementar da Equação

Aula 10

- ✈ A solução complementar é determinada estabelecendo-se o termo do lado direito da equação igual a zero e solucionando a equação homogênea resultante. Como resultado, obtém-se a mesma solução definida anteriormente, ou seja:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = \frac{F_0}{m} \cdot \text{sen}(\omega_0 \cdot t)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

$$x_c = A \cdot \text{sen } \omega_n \cdot t + B \cdot \text{cos } \omega_n \cdot t$$

$$x_c = C \cdot \text{sen}(\omega_n \cdot t + \emptyset)$$



Solução Particular da Equação

Aula 10

- Como o movimento é periódico, uma solução particular da equação pode ser determinada propondo-se uma solução da forma:

$$x_p = X \cdot \text{sen} \cdot \omega_0 \cdot t$$

- Calculando-se as derivadas de primeira e segunda ordem, tem-se que:

$$\dot{x} = \omega_0 \cdot X \cdot \cos \cdot \omega_0 \cdot t$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 \cdot X \cdot \text{sen} \cdot \omega_0 \cdot t$$

- Substituindo na equação de vibração forçada, pode-se escrever que:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = \frac{F_0}{m} \cdot \text{sen}(\omega_0 \cdot t)$$

$$-\omega_0^2 \cdot X \cdot \text{sen} \cdot \omega_0 \cdot t + \frac{k}{m} \cdot X \cdot \text{sen} \cdot \omega_0 \cdot t = \frac{F_0}{m} \cdot \text{sen}(\omega_0 \cdot t)$$



Solução Particular da Equação

Aula 10

🌐 Solucionando a equação para X , tem-se que:

$$-\omega_0^2 \cdot X \cdot \text{sen} \cdot \omega_0 \cdot t + \frac{k}{m} \cdot X \cdot \text{sen} \cdot \omega_0 \cdot t = \frac{F_0}{m} \cdot \text{sen}(\omega_0 \cdot t)$$

$$\text{sen} \cdot \omega_0 \cdot t \cdot \left(-\omega_0^2 \cdot X + \frac{k}{m} \cdot X \right) = \frac{F_0}{m} \cdot \text{sen}(\omega_0 \cdot t)$$

$$-\omega_0^2 \cdot X + \frac{k}{m} \cdot X = \frac{F_0}{m}$$

$$X \cdot \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2 \right) = \frac{F_0}{m}$$

$$X = \frac{\frac{F_0}{m}}{\left(\frac{k}{m} - \omega_0^2 \right)} \rightarrow X = \frac{\frac{F_0}{m}}{\frac{k}{m} \cdot \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_n^2} \right)}$$

$$X = \frac{\frac{F_0}{m} \cdot \frac{m}{k}}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_n} \right)^2}$$

$$X = \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_n} \right)^2}$$

🌐 Substituindo na solução particular, tem-se que:

$$x_p = X \cdot \text{sen} \cdot \omega_0 \cdot t$$

$$x_p = \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_n} \right)^2} \cdot \text{sen} \cdot \omega_0 \cdot t$$



Solução Geral da Equação

Aula 10

✈ Portanto, a solução geral da equação é dada por:

$$x = x_c + x_p$$

$$x = C \cdot \text{sen}(\omega_n \cdot t + \phi) + \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_n}\right)^2} \cdot \text{sen} \cdot \omega_0 \cdot t$$

✈ Nessa equação, x descreve dois tipos de movimento vibratório do bloco.

✈ A solução complementar x_c define a vibração livre, que depende da frequência angular $\omega_n = \sqrt{k/m}$ e das constantes C e ϕ .

✈ A solução particular x_p descreve a vibração forçada do bloco causada pela força $F_0 \cdot \text{sen}(\omega_0 \cdot t)$.



Vibração Transitória e Permanente

Aula 10

- ✈ Como todos os sistemas vibrantes estão, na realidade, sujeitos a atrito, a vibração livre, se atenua com o passar do tempo e tende a desaparecer.
- ✈ Por essa razão, a vibração livre é denominada transitória.
- ✈ Por sua vez, a vibração forçada é chamada de vibração em regime estacionário ou permanente, pois se mantém indefinidamente



Fator de Amplificação

Aula 10

- ☉ Pode-se observar que a amplitude da vibração forçada X depende da razão de frequências (ω_0/ω_n) .
- ☉ Definindo o fator de amplificação FA como a razão entre a amplitude de vibração no regime permanente, X e a deflexão estática F_0/k , que seria produzida pela amplitude da força periódica F_0 , pode-se escrever que:

$$X = \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_n}\right)^2}$$

$$F \cdot A = \frac{X}{F_0/k}$$



$$F \cdot A = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_n}\right)^2}$$

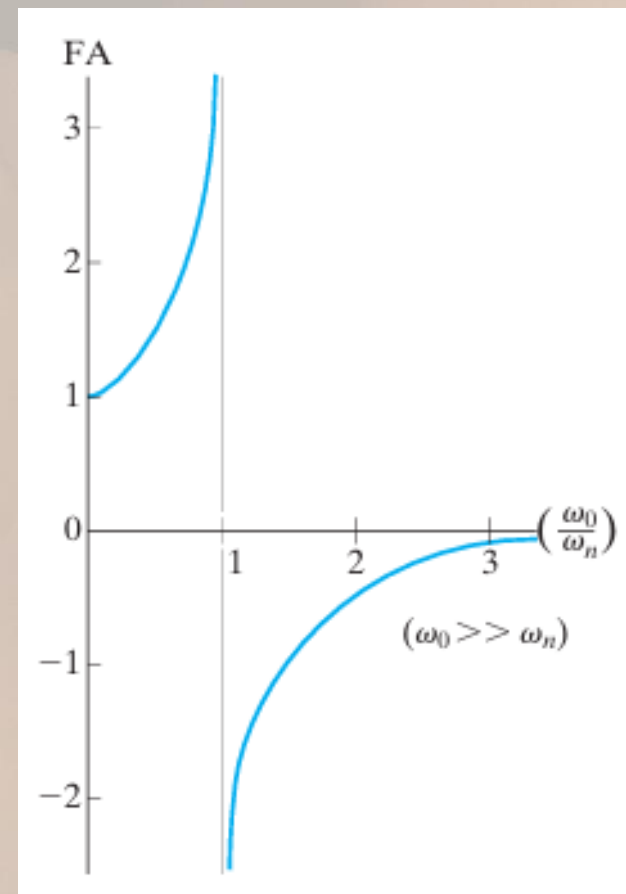


Ressonância

Aula 10

- ✈ A equação pode ser representada graficamente.
- ✈ Observe que, se a força ou deslocamento for aplicada com uma frequência próxima da frequência natural do sistema, ou seja, $(\omega_0/\omega_n) \approx 1$, a amplitude de vibração do bloco se tornará extremamente grande.
- ✈ Isso ocorre porque a força F é aplicada ao bloco, de maneira que ela sempre segue seu movimento. Essa condição é chamada de ressonância.
- ✈ Na prática, vibrações ressonantes podem causar tensões enormes e a rápida quebra de peças.

$$F.A = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_n}\right)^2}$$





- ✈ A ressonância, na análise de vibrações mecânicas, é um fenômeno físico que ocorre quando a frequência de uma excitação externa aplicada a um sistema coincide ou se aproxima de sua frequência natural de vibração.
- ✈ Nessa condição, a troca de energia entre a força excitadora e o sistema torna-se extremamente eficiente, resultando em um acúmulo progressivo de energia vibratória e, conseqüentemente, em um aumento significativo da amplitude das oscilações.
- ✈ Do ponto de vista físico, a ressonância pode ser entendida como uma sincronização entre o ritmo da força externa e a resposta natural do sistema, de modo que cada ciclo da excitação contribui para intensificar o movimento, em vez de atenuá-lo.



- ✈ Embora esse fenômeno seja explorado de forma positiva em diversas aplicações, como na geração de ondas sonoras em instrumentos musicais ou no funcionamento de dispositivos oscilatórios, em sistemas mecânicos e estruturais ele é frequentemente indesejado, pois pode provocar esforços excessivos, fadiga prematura e até falhas catastróficas.
- ✈ Estruturas como pontes, edifícios, turbo-máquinas e veículos estão sujeitas a condições de ressonância se não forem devidamente projetadas para evitar a coincidência entre frequências naturais e excitações externas, como rajadas de vento, rotações de motores ou irregularidades do solo.
- ✈ Dessa forma, a ressonância é um conceito fundamental na engenharia de vibrações, pois evidencia a importância de compreender e controlar as frequências naturais de um sistema a fim de garantir sua segurança, durabilidade e desempenho.



- Os efeitos provocados pela ressonância na análise de vibrações mecânicas são de grande relevância, pois representam uma das principais causas de falhas em sistemas dinâmicos quando não devidamente controlados.
- Quando um sistema é excitado em sua frequência natural, a energia fornecida pela excitação é continuamente acumulada, e isso gera um aumento significativo na amplitude das oscilações. Esse crescimento pode ser tão intenso que ultrapassa os limites de resistência dos materiais, levando à ocorrência de fadiga estrutural, deformações permanentes ou até mesmo rupturas catastróficas.
- Além dos danos físicos, a ressonância também pode provocar efeitos indesejáveis como ruídos excessivos, desconforto para operadores e usuários, perda de eficiência energética e redução da vida útil de componentes mecânicos.
- Em máquinas rotativas, por exemplo, a ressonância pode gerar vibrações que comprometem o alinhamento de eixos, provocam desgaste prematuro de rolamentos e danificam engrenagens.



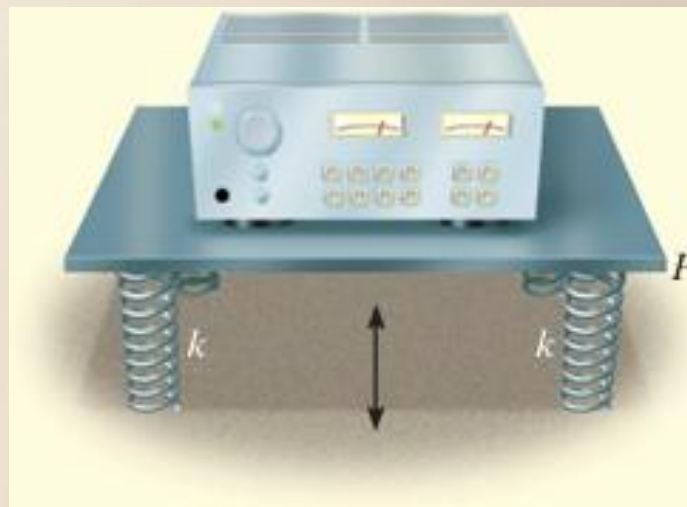
- 🌐 Em estruturas civis, como pontes e edifícios, a coincidência entre frequências naturais e excitações externas, como ventos, tráfego ou terremotos, pode gerar oscilações perigosas que comprometem a estabilidade global.
- 🌐 No campo automotivo, a ressonância pode reduzir o conforto e a segurança, ao transmitir vibrações indesejáveis para a carroceria e os ocupantes.
- 🌐 Portanto, os efeitos da ressonância não se limitam apenas a um fenômeno físico de amplificação de vibrações, mas se traduzem em problemas práticos que impactam diretamente a durabilidade, a segurança e o desempenho de sistemas mecânicos e estruturais, justificando a importância de seu estudo e controle na engenharia.



Exemplo de Aplicação

Aula 10

- ✈ O instrumento mostrado na figura está preso rigidamente à plataforma P, que por sua vez é suportada por quatro molas, cada uma com uma rigidez $k = 800 \text{ N/m}$. A plataforma está inicialmente em repouso. Num dado instante, o piso passa a sofrer um deslocamento $\delta = 10 \cdot \sin(8 \cdot t) \text{ mm}$, onde t é dado em segundos. Suponha que a massa total do instrumento e da plataforma seja de 20 kg . Determine a amplitude da vibração em regime permanente e calcule qual a frequência da vibração do chão necessária para causar ressonância.





Solução do Exemplo

Aula 10

- 🌐 A frequência natural é calculada considerando-se 4 molas associadas em paralelo, resultando em:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} \longrightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{4 \cdot 800}{20}}$$

$$\omega_n = 12,65 \text{ rad/s}$$

- 🌐 A amplitude da vibração em regime permanente é determinada considerando-se a relação $k \cdot \delta_0$ substituindo F_0 , resultando em:

$$X = \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_n}\right)^2} \longrightarrow X = \frac{\frac{k \cdot \delta_0}{k}}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_n}\right)^2}$$

$$X = \frac{\delta_0}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_n}\right)^2} \longrightarrow X = \frac{10}{1 - \left(\frac{8}{12,65}\right)^2}$$

$$X = 16,7 \text{ mm}$$

- 🌐 Ocorrerá ressonância quando a amplitude de vibração provocada pelo deslocamento do piso se aproximar do infinito. Essa situação será obtida quando:

$$\omega_0 = \omega_n = 12,65 \text{ rad/s}$$



Exercícios Propostos

Aula 10

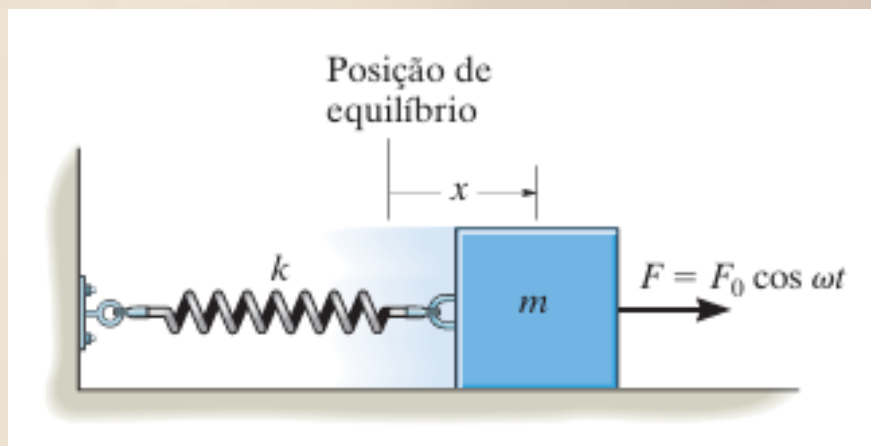
1. Um bloco que possui massa m é suspenso por uma mola com uma rigidez k . Se uma força vertical para baixo $F = F_0$ é aplicada sobre o peso, determine a equação que descreve a posição do bloco em função do tempo.
2. Um bloco de 4 kg está suspenso em uma mola de rigidez $k = 600$ N/m. Puxa-se o bloco para baixo 50 mm de sua posição de equilíbrio. O bloco é, então, solto a partir do repouso no instante $t = 0$. Impondo ao suporte um deslocamento $\delta = 10 \cdot \sin(4 \cdot t)$ mm, onde t é dado em segundos, determine a equação que descreve o movimento vertical do bloco. Suponha que o deslocamento positivo seja para baixo.



Exercícios Propostos

Aula 10

3. Se o modelo de bloco e mola é submetido à força periódica $F = F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$, demonstre que a equação diferencial de movimento é $\ddot{x} + (k/m) \cdot x = (F_0/m) \cdot \cos(\omega \cdot t)$, onde x é medido a partir da posição de equilíbrio do bloco. Qual é a solução geral dessa equação?

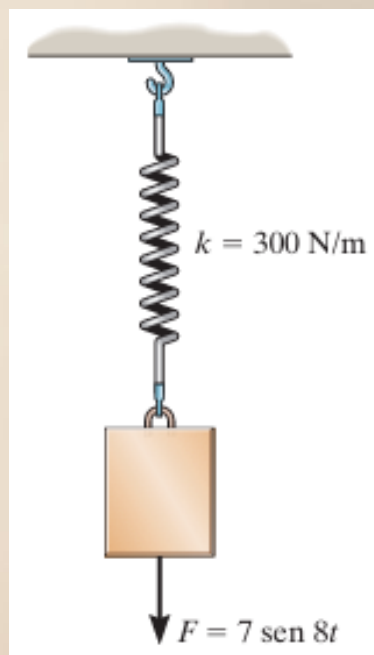




Exercícios Propostos

Aula 10

4. Um bloco de 5 kg está suspenso por uma mola de rigidez igual a 300 N/m. Se o bloco está submetido a uma força vertical $F = 7 \cdot \sin(8 \cdot t)$ N, onde t é dado em segundos, determine a equação que descreve o movimento do bloco quando ele é empurrado para baixo 100 mm de sua posição de equilíbrio e solto a partir do repouso no instante $t = 0$. Suponha que os deslocamentos positivos sejam para baixo.

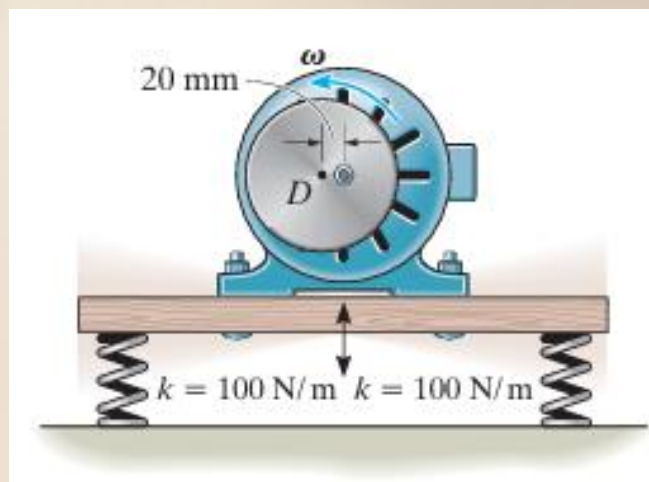




Exercícios Propostos

Aula 10

5. O motor elétrico tem massa de 50 kg e é suportado por quatro molas, cada uma com rigidez de 100 N/m. Se o motor gira um disco montado excentricamente, a 20 mm do eixo, determine a velocidade angular de rotação ω para a qual ocorre ressonância. Suponha que o motor vibre apenas na direção vertical.



Obrigado Pela Atenção

Nos Encontramos na Próxima Aula





Aula - 11

Vibração Livre com Amortecimento Viscoso



Conteúdos Abordados Nessa Aula

Aula 11

-  Vibração Livre com Amortecimento Viscoso;
-  Sistema Massa-Mola-Amortecedor;
-  Sistemas com Um Grau de Liberdade.



Vibração Livre com Amortecimento Viscoso

Aula 11

- ✪ A vibração livre com amortecimento ocorre quando um sistema mecânico, após ser perturbado de sua posição de equilíbrio, é liberado sem a ação de forças externas contínuas, mas com a presença de elementos dissipativos que reduzem progressivamente a energia vibratória.
- ✪ Diferentemente da vibração livre não amortecida, em que as oscilações se manteriam indefinidamente com a mesma amplitude em um modelo idealizado, a introdução do amortecimento faz com que a energia armazenada no sistema, seja em forma de energia cinética ou potencial elástica, seja gradualmente transformada em calor ou dissipada por atrito, até que o movimento seja completamente extinto.
- ✪ Esse fenômeno reflete uma situação real mais próxima dos sistemas físicos, pois todo material ou mecanismo está sujeito a algum nível de dissipação.



Vibração Livre com Amortecimento Viscoso

Aula 11

-  Fisicamente, o comportamento da vibração livre com amortecimento pode ser descrito pela equação diferencial do movimento, em que o termo de amortecimento é proporcional à velocidade da massa.
-  A solução dessa equação mostra que a amplitude da oscilação diminui exponencialmente com o tempo, resultando em um movimento oscilatório atenuado.
-  O regime da vibração depende da intensidade do amortecimento: no caso de amortecimento leve, o sistema ainda oscila em torno da posição de equilíbrio, mas com amplitude decrescente; em condições de amortecimento crítico, o sistema retorna ao equilíbrio no menor tempo possível sem oscilar; e, para amortecimento supercrítico, o retorno ocorre de forma mais lenta, também sem oscilações.
-  Esses diferentes regimes são fundamentais para projetar sistemas que necessitam de controle adequado do movimento vibratório.



Vibração Livre com Amortecimento Viscoso

Aula 11

- ✈ Na análise de vibrações mecânicas, compreender a vibração livre com amortecimento é essencial porque permite prever como máquinas e estruturas responderão a perturbações iniciais, como impactos, deslocamentos súbitos ou variações momentâneas de carga.
- ✈ Esse conhecimento é aplicado, por exemplo, no projeto de suspensões automotivas, onde se busca um amortecimento adequado que evite tanto oscilações prolongadas quanto respostas excessivamente rígidas, garantindo conforto e segurança.
- ✈ Da mesma forma, em sistemas industriais e estruturais, a consideração do amortecimento permite reduzir os riscos de fadiga, minimizar ruídos indesejados e prolongar a vida útil dos componentes.
- ✈ Assim, a vibração livre com amortecimento é um conceito fundamental na dinâmica de sistemas, pois descreve de maneira realista como a energia vibratória é dissipada ao longo do tempo.



Vibração Livre com Amortecimento Viscoso

Aula 11

- 🌐 A análise do movimento de vibração considerada anteriormente não incluía os efeitos do atrito ou amortecimento no sistema, de modo que as soluções obtidas são apenas aproximadas.
- 🌐 Como todas as vibrações livres desaparecem com o tempo, é necessário incluir na análise o efeito de forças de amortecimento.
- 🌐 Em muitos casos o amortecimento é atribuído à resistência criada pela substância, como água, óleo ou ar, na qual o sistema vibra.
- 🌐 Para um corpo que se move lentamente no meio fluido, a resistência ao movimento é diretamente proporcional à velocidade do corpo, sendo que a força desse tipo é denominada força de amortecimento viscoso e a intensidade dessa força é expressa por uma equação da forma:

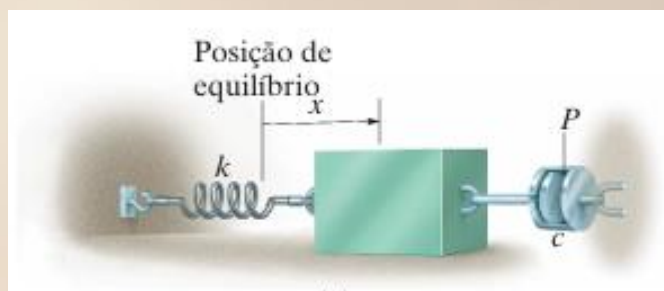
$$F = c \cdot \dot{x}$$



Vibração Livre com Amortecimento Viscoso

Aula 11

- 🌐 O movimento vibratório de um corpo ou sistema com amortecimento viscoso pode ser caracterizado pelo bloco e mola mostrados na figura.
- 🌐 O efeito do amortecimento é incluído no modelo pelo amortecedor ligado ao bloco no lado direito.
- 🌐 Ocorre amortecimento quando o pistão P no interior do cilindro se move para a direita ou para a esquerda.
- 🌐 O cilindro contém um fluido, e o movimento do pistão é retardado, pois o fluido deve escoar ao redor do pistão ou através de um pequeno orifício nesse pistão.
- 🌐 Supõe-se que o amortecedor apresenta um coeficiente de amortecimento viscoso c .

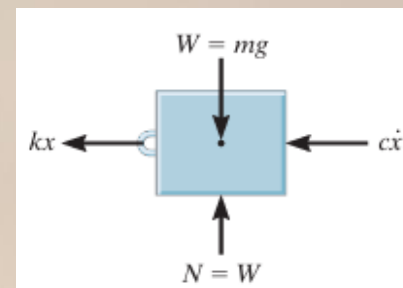
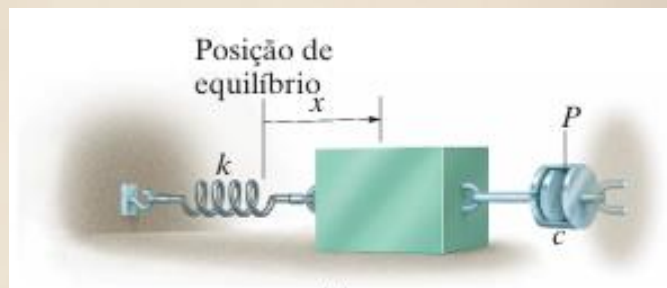




Equação de Movimento

Aula 11

- A figura mostra o diagrama de corpo livre do bloco, considerando que ele foi deslocado de uma distância x a partir de sua posição de equilíbrio.
- Tanto a força da mola $k \cdot x$ quanto a força de amortecimento $c \cdot \dot{x}$ opõem-se ao movimento para a frente apresentado pelo bloco, e a aplicação da equação de movimento resulta em:



$$\sum F_x = m \cdot a_x$$



$$-k \cdot x - c \cdot \dot{x} = m \cdot \ddot{x}$$



Solução da Equação de Movimento

Aula 11

- ☉ A equação de movimento $-k \cdot x - c \cdot \dot{x} = m \cdot \ddot{x}$, que é uma equação diferencial ordinária, linear, de segunda ordem, homogênea, tem solução da forma:

$$x = e^{\lambda \cdot t}$$

- ☉ e , é a base dos logaritmos naturais e λ é uma constante. O valor de λ pode ser obtido substituindo-se essa solução na de movimento, fornecendo:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0$$

$$m \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot t} + c \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot t} + k \cdot e^{\lambda \cdot t} = 0$$

$$e^{\lambda \cdot t} \cdot (m \cdot \lambda^2 + c \cdot \lambda + k) = 0$$



Solução da Equação de Movimento

Aula 11

Como $e^{\lambda \cdot t}$ nunca é zero, uma solução será possível se impusermos:

$$(m \cdot \lambda^2 + c \cdot \lambda + k) = 0$$

Resolvendo essa equação do segundo grau, obtemos dois valores de λ :

$$\lambda_1 = -\frac{c}{2 \cdot m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2 \cdot m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

$$\lambda_2 = -\frac{c}{2 \cdot m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2 \cdot m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

A solução geral da equação é, portanto, uma combinação linear de exponenciais que envolve essas duas raízes. Há três possibilidades de combinação de λ_1 e λ_2 que devem ser consideradas.



Coeficiente de Amortecimento Crítico

Aula 11

- ✈ Antes de discutir as três combinações de λ_1 e λ_2 , definiremos o coeficiente de amortecimento crítico c_c como o valor de c que anula o radicando nas raízes λ_1 e λ_2 , portanto:

$$\left(\frac{c_c}{2 \cdot m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0$$

$$c_c = 2 \cdot m \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$c_c = 2 \cdot m \cdot \omega_n$$



- ✈ Quando $c > c_c$, as raízes λ_1 e λ_2 são reais negativas. A solução geral da equação pode, então, ser escrita como:

$$x = A \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + B \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}$$

- ✈ O movimento correspondente a essa solução é não vibratório. O efeito do amortecimento é tão intenso que, quando o bloco é deslocado e solto, ele simplesmente volta para a posição inicial sem oscilar. Diz-se que o sistema é superamortecido.



- ✈ Se $c = c_c$, então, $\lambda_1 = \lambda_2 = -c_c/2 \cdot m = -\omega_n$.
- ✈ Essa situação é conhecida como amortecimento crítico, pois ela representa a condição para a qual c tem o menor valor necessário para o sistema ser não vibratório.
- ✈ Usando os métodos de equações diferenciais, podemos mostrar que a solução da equação geral para o amortecimento crítico é:

$$x = (A + B \cdot t) \cdot e^{-\omega_n \cdot t}$$



Sistema Subamortecido

Aula 11

- ☉ Geralmente, na maioria dos casos, $c < c_c$. Nessa situação o sistema é dito subamortecido.
- ☉ As raízes λ_1 e λ_2 são números complexos conjugados e a solução geral da equação pode ser escrita na forma:

$$x = D \cdot \left[e^{-(c/2 \cdot m) \cdot t} \cdot \sin(\omega_d \cdot t + \phi) \right]$$

- ☉ Nessa equação, D e ϕ são constantes que podem ser determinadas pelas condições iniciais do problema, isto é, pelos valores da posição e da velocidade iniciais. A constante ω_d é denominada frequência angular (ou pulsação) natural amortecida do sistema. Seu valor é dado por:

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2 \cdot m}\right)^2} = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_c}\right)^2}$$

- ☉ A razão c/c_c é conhecida como fator de amortecimento.

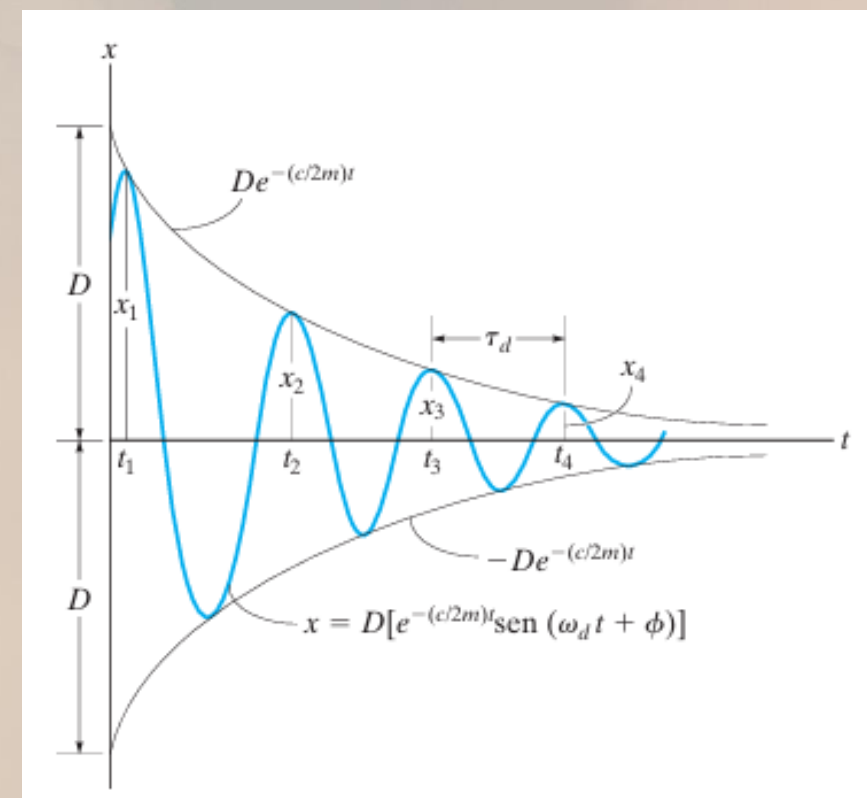


Gráfico do Sistema Subamortecido

Aula 11

- A figura mostra o gráfico do sistema subamortecido.
- Devido à função exponencial, o deslocamento limite do sistema decresce a cada ciclo. Usando a pulsação natural amortecida o período, pode ser escrito como:
- Como $\omega_d < \omega_n$, o período da vibração amortecida, τ_d , é maior do que o período da vibração não amortecida, $\tau = 2 \cdot \pi / \omega_n$

$$\tau_d = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_d}$$





Decremento Logarítmico

Aula 11

-  O decremento logarítmico é uma grandeza fundamental na análise da vibração livre com amortecimento, pois descreve de maneira quantitativa a taxa de decaimento da amplitude de oscilação em sistemas vibratórios.
-  Quando um sistema é perturbado e inicia um movimento vibratório, a presença do amortecimento faz com que a energia seja gradualmente dissipada, geralmente na forma de calor, devido à resistência viscosa ou atritos presentes no mecanismo.
-  Como consequência, as amplitudes sucessivas do movimento não se mantêm constantes, mas diminuem progressivamente até que o sistema retorne ao estado de equilíbrio.
-  O decremento logarítmico mede exatamente essa redução da amplitude de um ciclo vibratório para o ciclo seguinte, permitindo avaliar de forma prática a intensidade do amortecimento.



Decremento Logarítmico

Aula 11

- ✈ Fisicamente, o decremento logarítmico é definido como o logaritmo natural da razão entre duas amplitudes sucessivas da vibração, geralmente separadas por um período.
- ✈ Essa medida independe da magnitude absoluta do movimento, já que se baseia na relação entre amplitudes, o que a torna extremamente útil em ensaios experimentais.
- ✈ Quanto maior for o valor do decremento logarítmico, maior é a taxa de dissipação de energia do sistema e, portanto, mais rapidamente a vibração é atenuada.
- ✈ Em contrapartida, valores baixos indicam que o sistema apresenta um amortecimento reduzido, o que resulta em vibrações mais duradouras.



Decremento Logarítmico

Aula 11

- ✈ Na prática, o decremento logarítmico é aplicado em diferentes áreas da engenharia para determinar o coeficiente de amortecimento de sistemas sem a necessidade de conhecer previamente todas as suas propriedades físicas.
- ✈ Por exemplo, em testes com estruturas metálicas, mede-se a redução de amplitudes de deslocamento após um impacto inicial para estimar a capacidade de dissipação de energia do material e dos elementos de fixação.
- ✈ Em veículos, ele pode ser utilizado para avaliar a eficiência de amortecedores, comparando o comportamento de oscilações sucessivas após a suspensão ser excitada.



Decremento Logarítmico

Aula 11

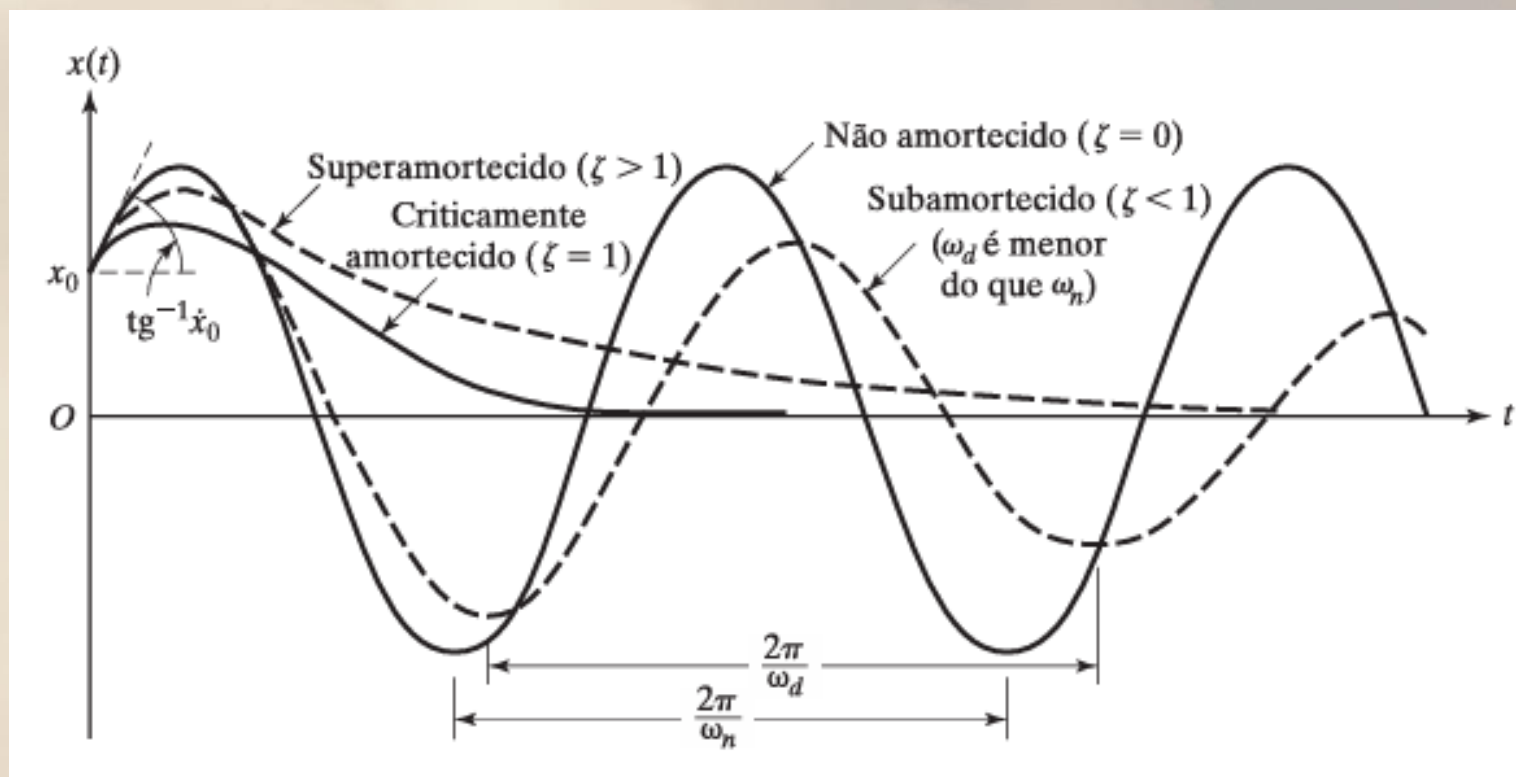
- Assim, o decremento logarítmico desempenha papel central no estudo de vibrações livres com amortecimento, oferecendo um método simples e eficaz para caracterizar a atenuação de movimentos oscilatórios.
- Sua relevância vai além da teoria, pois possibilita a verificação experimental e prática de parâmetros essenciais em projetos de máquinas, veículos e estruturas, garantindo a confiabilidade e a segurança no desempenho dinâmico desses sistemas.

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_d} \cdot \frac{c}{2 \cdot m}$$



Comparação do Sistema Vibratório Amortecido

Aula 11





- 🌐 A vibração livre com amortecimento está presente em diversos sistemas do cotidiano e sua análise é fundamental para garantir segurança, conforto e durabilidade em máquinas e estruturas.
- 🌐 Um exemplo clássico de aplicação prática encontra-se nas suspensões automotivas, em que o conjunto mola-amortecedor atua para absorver os impactos provenientes das irregularidades do solo, quando o veículo passa por um obstáculo, ocorre uma excitação inicial que gera vibração livre.
- 🌐 O papel do amortecedor é justamente dissipar a energia dessa vibração, evitando que o carro oscile repetidamente e proporcionando maior estabilidade e conforto aos ocupantes.



- ☉ Outro exemplo prático é observado em pontes e passarelas, onde o vento, a passagem de veículos ou de pedestres podem induzir deslocamentos súbitos.
- ☉ A presença de amortecedores estruturais garante que as oscilações provocadas por essas excitações iniciais sejam reduzidas de forma controlada, prevenindo movimentos excessivos que comprometeriam tanto a segurança estrutural quanto a sensação de estabilidade para os usuários.
- ☉ Esses dispositivos são projetados para atuar dentro de regimes específicos de amortecimento, garantindo o retorno rápido da estrutura ao equilíbrio.



- ✈ Na indústria, máquinas rotativas como turbinas, compressores e motores também apresentam vibrações livres após paradas súbitas ou falhas transitórias.
- ✈ O amortecimento introduzido por mancais fluidodinâmicos ou sistemas de lubrificação auxilia na dissipação da energia vibratória, evitando que oscilações persistentes causem danos por fadiga ou desgaste prematuro.
- ✈ Esse comportamento controlado é essencial para manter a confiabilidade e prolongar a vida útil dos equipamentos.



- ✈ Outro campo de aplicação relevante é o da engenharia civil em edifícios de grande altura. Estruturas como arranha-céus podem sofrer deslocamentos iniciais provocados por ventos ou pequenos tremores.
- ✈ O emprego de amortecedores de massa sintonizada permite que as oscilações livres sejam reduzidas de maneira eficiente, trazendo maior conforto aos ocupantes e preservando a integridade da construção.
- ✈ Assim, a vibração livre com amortecimento está presente em inúmeros setores e sua compreensão prática permite o desenvolvimento de soluções que conciliam desempenho, segurança e conforto em sistemas dinâmicos.

Obrigado Pela Atenção

Nos Encontramos na Próxima Aula





Aula - 12

Vibração Livre com Amortecimento Viscoso



Conteúdos Abordados Nessa Aula

Aula 12

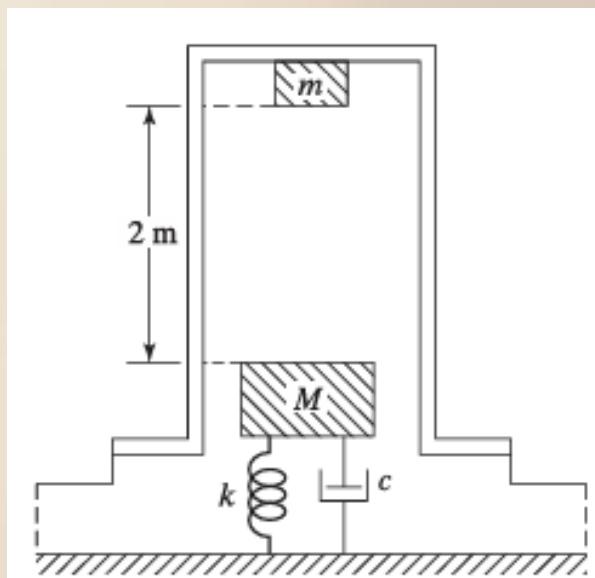
-  Vibração Livre com Amortecimento Viscoso;
-  Sistema Massa-Mola-Amortecedor;
-  Sistemas com Um Grau de Liberdade;
-  Solução de Exercícios.



Exemplo de Aplicação

Aula 12

- ☉ A bigorna de um martelo de forjar pesa 5000 N e está montada sobre uma base que possui uma rigidez de $5 \cdot 10^6$ N/m e um fator de amortecimento viscoso $c/c_c = 0,09899$. Durante determinada operação de forjamento, o martelo-pilão com peso de 1000 N é acionado e cai de uma altura de 2 m sobre a bigorna, conforme mostrado na figura. Se a bigorna estiver em repouso antes do impacto do pilão, determine a resposta da bigorna após o impacto. Considere que o deslocamento da bigorna é dado por $x = e^{-(c/c_c) \cdot \omega_n \cdot t} \cdot [\cos(\omega_d \cdot t) + 0,0149 \cdot \sin(\omega_d \cdot t)]$ m.





Solução do Exemplo

Aula 12

🌐 O fator de amortecimento é $c/c_c = 0,09899$:

🌐 A frequência natural não amortecida da bigorna é:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \longrightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{5 \cdot 10^6}{5000/9,81}}$$

$$\omega_n = 98,99 \text{ rad/s}$$

🌐 A frequência natural amortecida da bigorna é:

$$\omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_c}\right)^2}$$

$$\omega_d = 98,99 \cdot \sqrt{1 - 0,09899^2}$$

$$\omega_d = 98,02 \text{ rad/s}$$

🌐 Portanto, a equação do deslocamento da bigorna pode ser escrita da seguinte forma:

$$x = e^{-(c/c_c) \cdot \omega_n \cdot t} \cdot [\cos(\omega_d \cdot t) + 0,0149 \cdot \sin(\omega_d \cdot t)]$$

$$x = e^{-(0,09899) \cdot 98,99 \cdot t} \cdot [\cos(98,02 \cdot t) + 0,0149 \cdot \sin(98,02 \cdot t)]$$

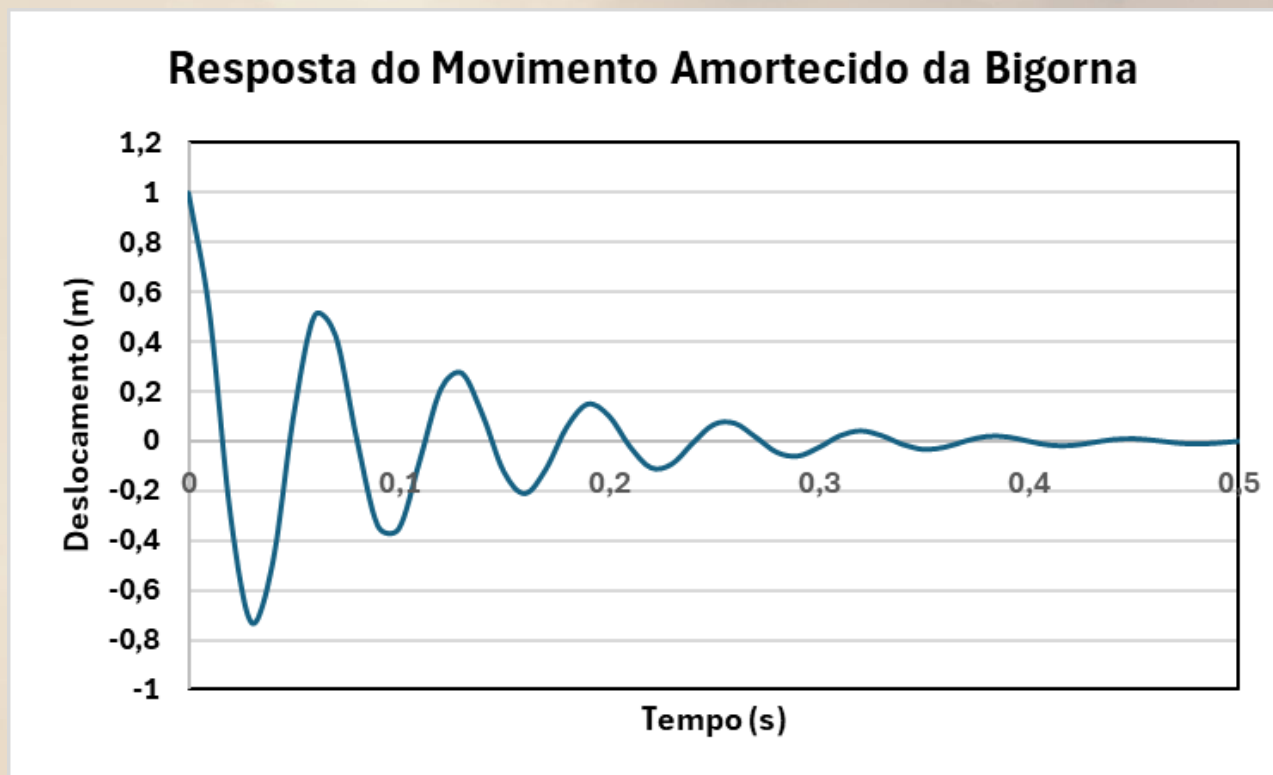
$$x = e^{-9,799 \cdot t} \cdot [\cos(98,02 \cdot t) + 0,0149 \cdot \sin(98,02 \cdot t)]$$



Solução do Exemplo

Aula 12

🌐 A representação gráfica do movimento amortecido da bigorna é:

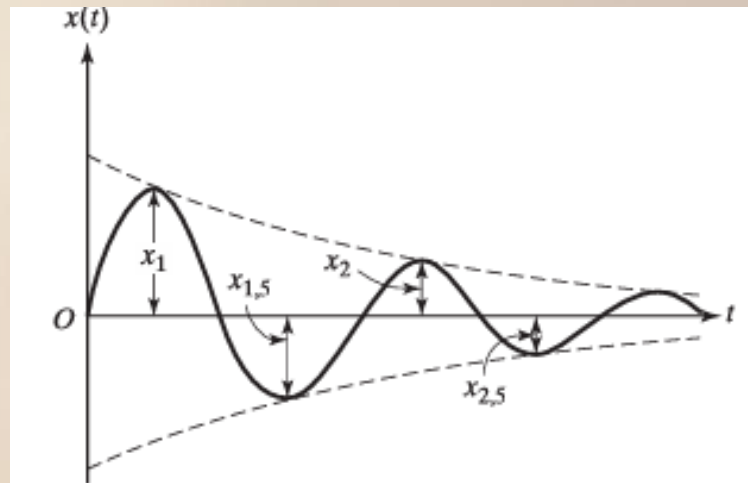
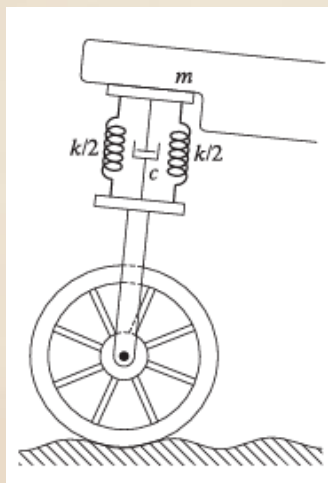




Exemplo de Aplicação

Aula 12

- 🌐 O projeto de um absorvedor de choque subamortecido para uma motocicleta de 200 kg de massa deve atender as seguintes especificações: quando o amortecedor estiver sujeito a uma velocidade vertical inicial devido a uma saliência na estrada, a curva deslocamento versus tempo resultante deve ter a forma indicada na figura. Determine as constantes de rigidez e amortecimento necessárias para o amortecedor se o período de vibração amortecida for de 2 s, a frequência natural for de $\omega_n = 3,4338$ rad/s e a amplitude x_1 tiver de ser reduzida a um quarto em um meio ciclo ($x_{1,5} = x_1/4$).





Solução do Exemplo

Aula 12

- Considerando a frequência natural $\omega_n = 3,4338$ rad/s, a constante de amortecimento crítico é dada por:

$$c_c = 2 \cdot m \cdot \omega_n \longrightarrow c_c = 2 \cdot 200 \cdot 3,4338$$

$$c_c = 1373,54 \text{ Ns/m}$$

- Como o período amortecido é igual a 2 s, a frequência natural amortecida será dada por:

$$\tau_d = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_d} \longrightarrow \omega_d = \frac{2 \cdot \pi}{\tau_d} \longrightarrow \omega_d = \frac{2 \cdot \pi}{2}$$

$$\omega_d = \pi \longrightarrow \omega_d = 3,1416 \text{ rad/s}$$

- Através da aplicação do decremento logarítmico é possível determinar a constante de amortecimento:

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_d} \cdot \frac{c}{2 \cdot m}$$

- Como $(x_{1,5} = x_1/4)$, pode-se escrever que $(x_2 = x_{1,5}/4)$, portanto:

$$(x_2 = x_1/16)$$

- Resultando em:

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_1/16} = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_d} \cdot \frac{c}{2 \cdot m}$$



Solução do Exemplo

Aula 12

 Solucionando a equação do decremento logarítmico tem-se que:

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_1/16} = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_d} \cdot \frac{c}{2 \cdot m}$$

$$\ln(16) = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_d} \cdot \frac{c}{2 \cdot m}$$

$$2,7725 = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_d} \cdot \frac{c}{2 \cdot m}$$

$$2,7725 = \frac{2 \cdot \pi}{\pi} \cdot \frac{c}{2 \cdot 200}$$

$$2,7725 = \frac{c}{200}$$

$$c = 2,7725 \cdot 200 \quad \longrightarrow \quad c = 554,5 \text{ Ns/m}$$

 A rigidez será:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \longrightarrow \quad \omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

$$k = m \cdot \omega_n^2$$

$$k = 200 \cdot 3,4338^2$$

$$k = 2358,2 \text{ N/m}$$



Exercícios Propostos

Aula 12

1. O bloco mostrado na figura tem massa de 20 kg e a mola tem rigidez $k = 600 \text{ N/m}$. Após o bloco ser deslocado e solto, efetuaram-se duas medidas da amplitude $x_1 = 150 \text{ mm}$ e $x_2 = 87 \text{ mm}$. Determine o coeficiente de amortecimento viscoso c .





Exercícios Propostos

Aula 12

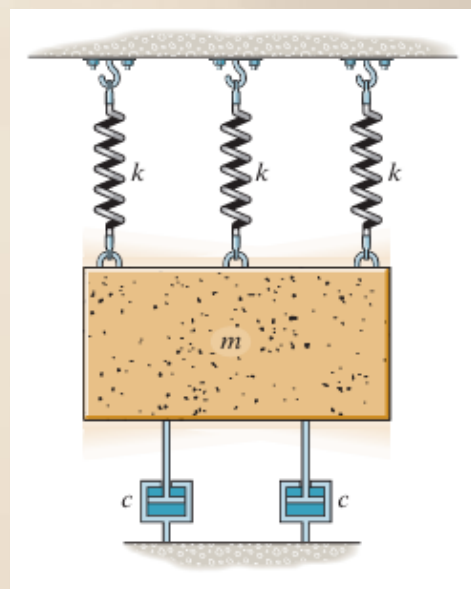
2. Um bloco de 0,8 kg está suspenso por uma mola de rigidez igual a 120 N/m. Se um amortecedor apresenta força de amortecimento de 2,5 N quando a velocidade é de 0,2 m/s, determine o período de vibração livre.
3. Um bloco de 7 kg está suspenso por uma mola de rigidez $k = 600$ N/m. No instante $t = 0$, imprime-se ao bloco na posição de equilíbrio uma velocidade de 0,6 m/s. Determine sua posição em função do tempo. O movimento ocorre num meio que oferece uma força de amortecimento $F = (50 \cdot |v|)$ N, onde v é dado em m/s. Considere deslocamentos positivos para baixo.



Exercícios Propostos

Aula 12

4. Determine a equação diferencial de movimento para o sistema vibratório amortecido mostrado na figura. Que tipo de movimento ocorre para esse sistema?
Considere $k = 100 \text{ N/m}$, $c = 200 \text{ Ns/m}$ e $m = 25 \text{ kg}$.



Obrigado Pela Atenção

Nos Encontramos na Próxima Aula





Aula - 13

Vibração Forçada com Amortecimento Viscoso



Conteúdos Abordados Nessa Aula

Aula 13

-  Vibração Forçada com Amortecimento Viscoso;
-  Sistema Massa-Mola-Amortecedor;
-  Sistemas com Um Grau de Liberdade.



Definição de Vibração Forçada Amortecida

Aula 13

- 🌐 A vibração forçada com amortecimento ocorre quando um sistema mecânico é submetido a uma força externa periódica e, ao mesmo tempo, possui mecanismos de dissipação de energia, geralmente representados por elementos de amortecimento viscoso ou de outra natureza.
- 🌐 Nessa condição, o movimento resultante não depende apenas das propriedades naturais do sistema, como massa, rigidez e amortecimento, mas também das características da excitação externa, como frequência, intensidade e forma de aplicação.
- 🌐 Diferentemente da vibração livre, em que o movimento tende a decair ao longo do tempo devido ao amortecimento, na vibração forçada a presença de uma fonte contínua de energia mantém o sistema em movimento permanente, estabelecendo uma resposta que pode atingir um regime estacionário após a passagem dos efeitos transitórios iniciais.



Definição de Vibração Forçada Amortecida

Aula 13

- 🌐 A presença do amortecimento desempenha um papel fundamental nesse fenômeno, pois atua limitando a amplitude das vibrações, especialmente quando a frequência da força externa se aproxima da frequência natural do sistema, situação em que ocorre a ressonância. Em um sistema não amortecido, a amplitude tenderia ao infinito em ressonância, o que, na prática, seria catastrófico. Já com o amortecimento, mesmo que reduzido, as amplitudes máximas permanecem controladas, garantindo maior estabilidade ao sistema.
- 🌐 O nível de amortecimento também influencia a largura da região de ressonância, de modo que sistemas com maior amortecimento apresentam uma resposta menos sensível a pequenas variações na frequência da força excitadora.
- 🌐 Do ponto de vista da análise de vibrações mecânicas, a vibração forçada com amortecimento é essencial para a compreensão do comportamento real de máquinas e estruturas em operação, pois dificilmente se encontram sistemas ideais sem dissipação de energia.



Definição de Vibração Forçada Amortecida

Aula 13

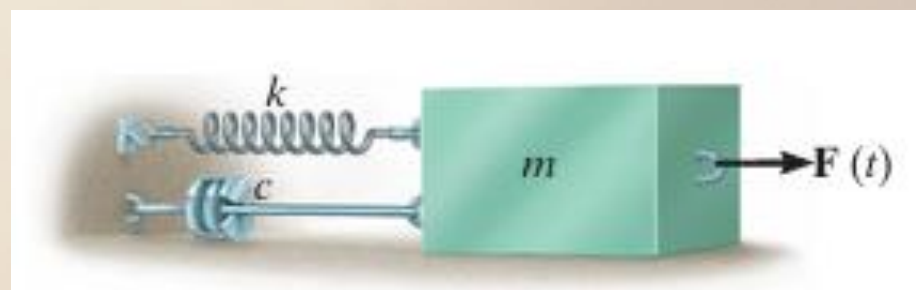
- ✈ Esse tipo de análise permite prever como equipamentos responderão a excitações externas, como as forças periódicas geradas por desequilíbrios em rotores, irregularidades em engrenagens, cargas de tráfego em pontes ou até mesmo excitações ambientais em edifícios e aeronaves.
- ✈ Além disso, fornece subsídios para o dimensionamento de isoladores e absorvedores dinâmicos, bem como para a escolha adequada de materiais e componentes que aumentem a segurança e a durabilidade do sistema.
- ✈ Assim, a vibração forçada com amortecimento se apresenta como uma das situações mais representativas da realidade prática na engenharia, permitindo ao analista prever o comportamento vibratório diante de excitações externas contínuas e propor soluções de controle que evitem a ocorrência de falhas, reduzam níveis de ruído e assegurem o funcionamento eficiente de máquinas e estruturas.



Definição de Vibração Forçada Amortecida

Aula 13

- ❶ O caso mais geral de movimento vibratório com um grau de liberdade ocorre quando o sistema inclui os efeitos do movimento forçado e do amortecimento induzido.
- ❷ A análise desse tipo de vibração é de grande valor prático quando aplicada a sistemas que apresentam características significativas de amortecimento.





Equação do Movimento

Aula 13

- ✈ O bloco e mola mostrados na figura são um modelo conveniente para representar as características vibratórias de um sistema amortecido submetido a uma força periódica $F = F_0 \cdot \text{sen}(\omega_0 \cdot t)$. Essa força tem amplitude F_0 e frequência angular ω . A aplicação da equação de movimento resulta em:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = F_0 \cdot \text{sen}(\omega_0 \cdot t)$$

- ✈ Como a equação é não homogênea, sua solução geral é a soma da solução complementar, x_c , com uma solução particular, x_p .
- ✈ A solução complementar é determinada igualando-se a zero o primeiro membro da equação, e como já discutido, é sempre amortecida, devido ao atrito sempre presente.
- ✈ Portanto, somente a solução particular, que descreve a vibração estacionária do sistema, permanece indefinidamente.



Amplitude e Ângulo de Fase

Aula 13

- Como a força aplicada é harmônica, o movimento em regime estacionário também é harmônico. Consequentemente, a solução particular tem a forma:

$$x_p = X' \cdot \text{sen}(\omega_0 \cdot t - \phi')$$

- Considerando que $\omega_n = \sqrt{k/m}$ e $c_c = 2 \cdot m \cdot \omega_n$, a amplitude X' e o ângulo de fase ϕ' podem ser determinados da seguinte forma:

$$X' = \frac{F_0/k}{\sqrt{[1 - (\omega_0/\omega_n)^2]^2 + [2 \cdot (c/c_c) \cdot (\omega_0/\omega_n)]^2}}$$

$$\theta' = \tan^{-1} \left[\frac{2 \cdot (c/c_c) \cdot (\omega_0/\omega_n)}{1 - (\omega_n/\omega_0)^2} \right]$$



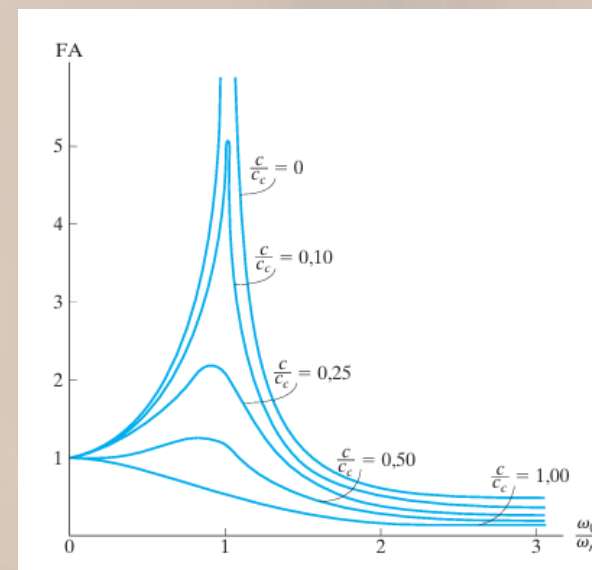
Fator de Amplificação

Aula 13

- 🌐 O fator de amplificação FA é definido como a razão entre a amplitude da deflexão provocada pela vibração forçada e a deflexão causada pela força estática F_0 , portanto:

$$FA = \frac{X'}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega_0/\omega_n)^2]^2 + [2 \cdot (c/c_c) \cdot (\omega_0/\omega_n)]^2}}$$

- 🌐 A figura mostra o gráfico do fator de amplificação FA versus a razão (ω_0/ω_n) para diferentes valores do fator de amortecimento (c/c_c) .
- 🌐 Pode-se observar nesse gráfico que FA aumenta à medida que o fator de amortecimento decresce.
- 🌐 A ressonância ocorre apenas quando o fator de amortecimento é nulo e a razão de frequência é igual a um.





Aplicações da Vibração Forçada Amortecida

Aula 13

-  A vibração forçada com amortecimento está presente em uma ampla variedade de sistemas mecânicos e estruturais, sendo fundamental na compreensão e no controle de fenômenos que ocorrem no cotidiano da engenharia.
-  Um dos exemplos mais comuns é encontrado na suspensão automotiva, onde os amortecedores trabalham em conjunto com as molas para controlar as vibrações induzidas pelo contato dos pneus com o solo.
-  As irregularidades do pavimento representam forças externas periódicas que excitam o sistema, e o amortecimento garante que a resposta vibratória não seja excessiva, evitando desconforto para os passageiros e reduzindo o desgaste prematuro de componentes.
-  Sem o efeito do amortecimento, a suspensão ficaria sujeita a oscilações prolongadas, prejudicando a dirigibilidade e a segurança do veículo.



Aplicações da Vibração Forçada Amortecida

Aula 13

-  Outro exemplo importante pode ser observado em máquinas rotativas, como turbinas, compressores e motores elétricos.
-  Nesses casos, o desbalanceamento do rotor gera uma força periódica que induz vibrações forçadas no sistema.
-  O amortecimento presente nos mancais, lubrificantes e suportes atua reduzindo a amplitude da resposta, especialmente quando a frequência de rotação se aproxima da frequência natural do conjunto, condição em que a ressonância poderia causar danos severos.
-  A análise da vibração forçada com amortecimento nesses equipamentos permite identificar níveis críticos de operação, dimensionar suportes e propor soluções de balanceamento que assegurem o funcionamento contínuo e confiável.



Aplicações da Vibração Forçada Amortecida

Aula 13

-  Nas estruturas civis, como pontes e edifícios, também é possível perceber aplicações práticas desse conceito.
-  As forças externas, vindas de ventos, tráfego ou até mesmo movimentos sísmicos, excitam os sistemas estruturais de forma periódica ou quase periódica.
-  O amortecimento estrutural, resultante de propriedades internas dos materiais ou de dispositivos específicos instalados, impede que as amplitudes vibratórias atinjam níveis perigosos.
-  Um exemplo notável é a utilização de amortecedores de massa sintonizados em arranha-céus, que funcionam como absorvedores dinâmicos para reduzir vibrações induzidas pelo vento, garantindo a estabilidade estrutural e o conforto dos ocupantes.



Aplicações da Vibração Forçada Amortecida

Aula 13

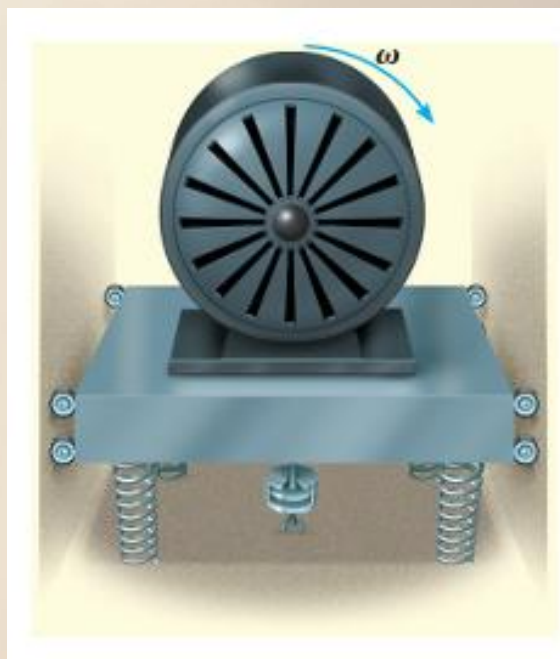
- ✈ Na indústria aeronáutica, a vibração forçada com amortecimento também se manifesta de maneira clara.
- ✈ Estruturas de asas, fuselagens e componentes internos estão sujeitas a forças externas periódicas, como as cargas aerodinâmicas variáveis e as oscilações de motores.
- ✈ O amortecimento, seja natural dos materiais ou introduzido por dispositivos adicionais, limita a resposta vibratória e evita falhas por fadiga.
- ✈ Essa análise é essencial não apenas para a segurança da aeronave, mas também para o desempenho, pois vibrações excessivas podem comprometer a eficiência aerodinâmica e aumentar os custos de manutenção.



Exemplo de Aplicação

Aula 13

- 🌀 O motor elétrico de 30 kg mostrado na figura está apoiado em quatro molas, cada uma com rigidez de 200 N/m. Considerando o rotor não balanceado, de modo que seu efeito seja equivalente a uma massa de 4 kg localizada a 60 mm do eixo de rotação, determine a amplitude de vibração para o rotor girando a $\omega = 10$ rad/s. O fator de amortecimento é $c/c_c = 0,15$.





Solução do Exemplo

Aula 13

- 🌐 A força periódica que causa a vibração devido ao rotor desbalanceado é dada por:

$$F_0 = m \cdot a_n \longrightarrow F_0 = m \cdot \omega_0^2 \cdot r$$

$$F_0 = 4 \cdot 10^2 \cdot 0,06 \longrightarrow F_0 = 4 \cdot 10^2 \cdot 0,06$$

$$F_0 = 24 \text{ N}$$

- 🌐 A frequência natural é calculada considerando-se 4 molas associadas em paralelo, resultando em:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} \longrightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{4 \cdot 200}{30}}$$

$$\omega_n = 5,164 \text{ rad/s}$$

- 🌐 A amplitude da vibração em regime permanente é determinada da seguinte forma:

$$X' = \frac{F_0/k}{\sqrt{[1 - (\omega_0/\omega_n)^2]^2 + [2 \cdot (c/c_c) \cdot (\omega_0/\omega_n)]^2}}$$

$$X' = \frac{24/800}{\sqrt{[1 - (10/5,164)^2]^2 + [2 \cdot 0,15 \cdot (10/5,164)]^2}}$$

$$X' = \frac{0,03}{\sqrt{[1 - 3,75]^2 + [2 \cdot 0,15 \cdot 1,936]^2}}$$

$$X' = \frac{0,03}{\sqrt{7,5625 + 0,3373}} \longrightarrow X' = \frac{0,03}{\sqrt{7,90}}$$

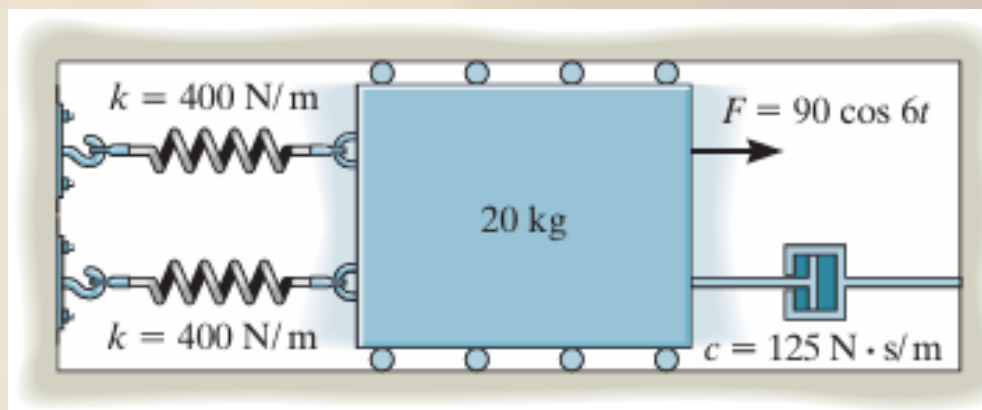
$$X' = \frac{0,03}{2,81} \longrightarrow X' = 0,0107 \text{ m} \longrightarrow X' = 10,7 \text{ mm}$$



Exercícios Propostos

Aula 13

1. O bloco de 20 kg está submetido à ação da força harmônica $F = 90 \cdot \cos(6 \cdot t)$ N, onde t é dado em segundos. Escreva a equação horária que descreve o movimento em regime permanente.

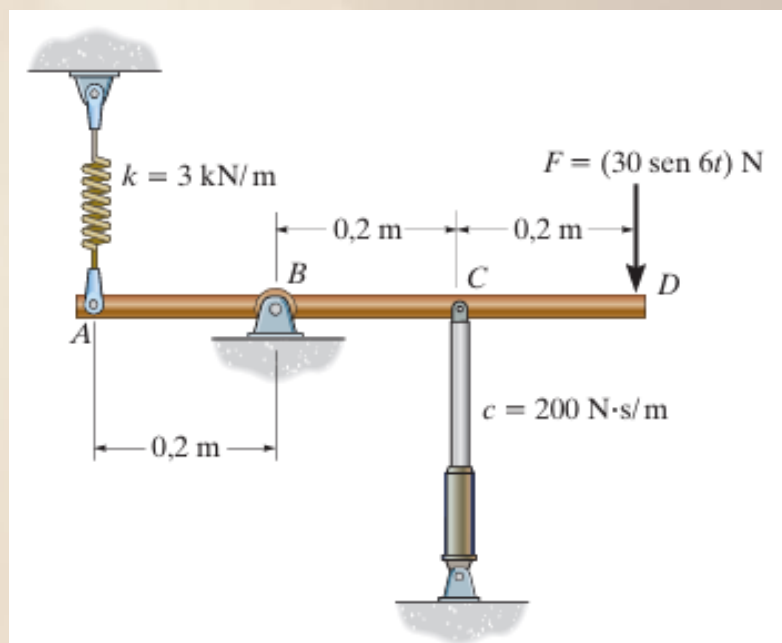




Exercícios Propostos

Aula 13

2. Se a barra de 12 kg for submetida a uma força periódica $F = 30 \cdot \sin(6 \cdot t)$ N, onde t é dado em segundos, determine a amplitude $\theta_{m\acute{a}x}$ da vibração em regime permanente da barra em torno do pino B. Considere que θ seja pequeno.



Obrigado Pela Atenção

Nos Encontramos na Próxima Aula





Aula - 14

Controle de Vibrações



Conteúdos Abordados Nessa Aula

Aula 14



Controle de Vibrações.



- ✈ O controle de vibrações, na análise de vibrações mecânicas, pode ser definido como o conjunto de técnicas, métodos e dispositivos aplicados com o objetivo de reduzir, modificar ou eliminar os efeitos indesejáveis das oscilações em sistemas dinâmicos.
- ✈ Fisicamente, as vibrações surgem como resultado da interação entre forças inerciais, elásticas e de dissipação de energia, e, quando não controladas, podem comprometer a integridade estrutural, o desempenho funcional e o conforto em diferentes aplicações da engenharia.
- ✈ O controle de vibrações atua, portanto, na modificação da resposta do sistema, seja alterando suas propriedades físicas, como massa, rigidez e amortecimento, seja introduzindo mecanismos adicionais que dissipem energia ou desviem a frequência de operação para longe da frequência natural.



- ✈ Esse processo pode ser realizado de forma passiva, por meio de dispositivos simples como molas, amortecedores e isoladores, ou de forma ativa, utilizando sensores, atuadores e controladores eletrônicos capazes de gerar forças de oposição ao movimento vibratório.
- ✈ Em ambos os casos, o objetivo principal é garantir que as vibrações se mantenham em níveis aceitáveis, evitando problemas de fadiga, falhas prematuras, desconforto ou perda de eficiência.
- ✈ Dessa maneira, o controle de vibrações é um elemento indispensável no projeto e na manutenção de máquinas, veículos, estruturas e equipamentos industriais, sendo um campo da engenharia que alia fundamentos teóricos a soluções práticas para assegurar segurança, durabilidade e desempenho em sistemas sujeitos a excitações dinâmicas.



Monograma de Vibração

Aula 14

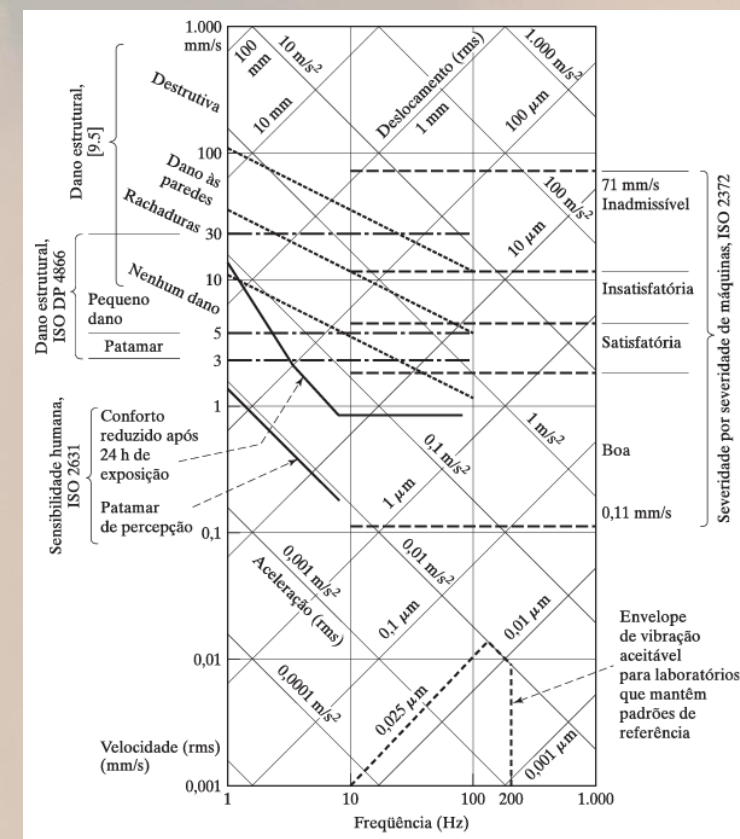
- ✈ O gráfico do monograma de vibração, na análise de vibrações mecânicas, é uma ferramenta gráfica utilizada para relacionar e interpretar de forma direta as grandezas fundamentais que caracterizam o movimento vibratório, como deslocamento, velocidade e aceleração.
- ✈ Ele é construído a partir das relações matemáticas que ligam essas variáveis em um movimento harmônico simples, no qual todas estão conectadas pela frequência de vibração. No monograma, é possível visualizar que, para uma determinada frequência, um aumento no deslocamento implica proporcionalmente em um aumento na velocidade e, de forma ainda mais acentuada, na aceleração.
- ✈ Essa característica torna o gráfico extremamente útil para compreender como a intensidade das vibrações se manifesta em diferentes níveis de análise, permitindo avaliar qual das grandezas é mais crítica em determinada situação prática.



Monograma de Vibração

Aula 14

- Do ponto de vista físico, o monograma de vibração auxilia na interpretação de medições industriais realizadas por sensores e acelerômetros, traduzindo os valores obtidos em grandezas equivalentes de fácil compreensão.
- Assim, ele permite que engenheiros e técnicos possam, a partir da frequência e de uma medida direta, determinar as demais variáveis associadas ao movimento.
- Essa capacidade de interligar deslocamento, velocidade e aceleração em uma única representação gráfica faz do monograma de vibração uma ferramenta prática e eficaz para diagnósticos de falhas, manutenção preditiva e análise do desempenho dinâmico de máquinas e estruturas.





Controle de Vibração na Fonte

Aula 14

- ✈ O controle de vibração na fonte, dentro da análise de vibrações mecânicas, consiste em atuar diretamente no ponto onde as oscilações são geradas, buscando reduzir ou eliminar suas causas antes que elas se propaguem para o restante do sistema.
- ✈ Essa abordagem é considerada a mais eficiente, pois evita que a energia vibratória se espalhe pelos componentes, diminuindo a necessidade de medidas corretivas posteriores.
- ✈ Fisicamente, esse tipo de controle pode ser realizado de diversas maneiras, como através do balanceamento de massas em elementos rotativos, da correção de desalinhamentos em eixos e acoplamentos, da eliminação de folgas excessivas em engrenagens ou da substituição de elementos que apresentem desgaste irregular.



Controle de Vibração na Fonte

Aula 14

- ✈ Outro método amplamente utilizado é a modificação das condições de operação, ajustando parâmetros como velocidade de rotação, frequência de excitação ou características do processo, de modo a evitar a coincidência com a frequência natural do sistema e, conseqüentemente, a ocorrência de ressonância.
- ✈ O controle na fonte também pode envolver melhorias no projeto, como a escolha de materiais mais adequados, o aumento da rigidez estrutural, a alteração da distribuição de massa ou a inclusão de amortecimento intrínseco nos componentes.
- ✈ Em máquinas industriais, por exemplo, o balanceamento dinâmico de rotores e ventiladores é uma aplicação clássica desse conceito, pois reduz significativamente os níveis de vibração e prolonga a vida útil dos rolamentos e acoplamentos.
- ✈ Dessa forma, o controle de vibração na fonte representa uma estratégia preventiva e proativa, fundamental para garantir a confiabilidade, a segurança e o desempenho de sistemas mecânicos, evitando falhas prematuras e reduzindo custos de manutenção ao atacar o problema em sua origem.



- 🌐 O balanceamento é uma das etapas mais relevantes no controle de vibrações mecânicas, pois está diretamente relacionado à estabilidade e ao bom funcionamento de máquinas e equipamentos rotativos.
- 🌐 Quando um rotor, ventilador, turbina ou qualquer elemento que gire em alta velocidade apresenta uma distribuição desigual de massa, forças centrífugas desequilibradas surgem e passam a atuar continuamente sobre o sistema, gerando vibrações intensas que comprometem não apenas o desempenho, mas também a durabilidade dos componentes.
- 🌐 O processo de balanceamento busca corrigir essa irregularidade, redistribuindo a massa de forma que o centro de gravidade coincida com o eixo de rotação, eliminando forças dinâmicas indesejadas.
- 🌐 Na prática, o balanceamento pode ser estático ou dinâmico, dependendo da complexidade do sistema e da frequência de operação. Em ambos os casos, seu objetivo é reduzir a amplitude das vibrações, minimizando os esforços transmitidos a rolamentos, suportes e estruturas de sustentação.

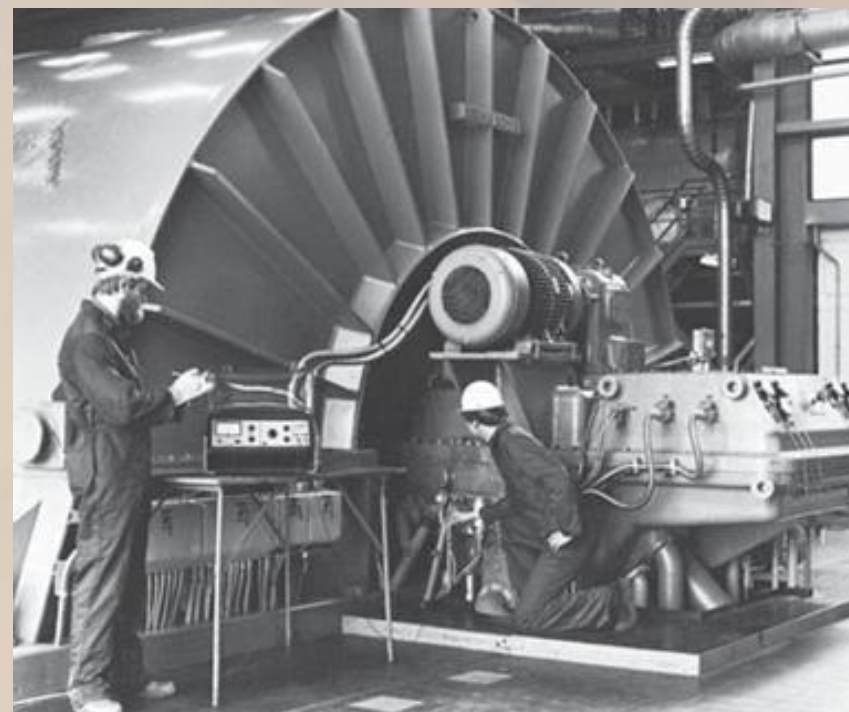
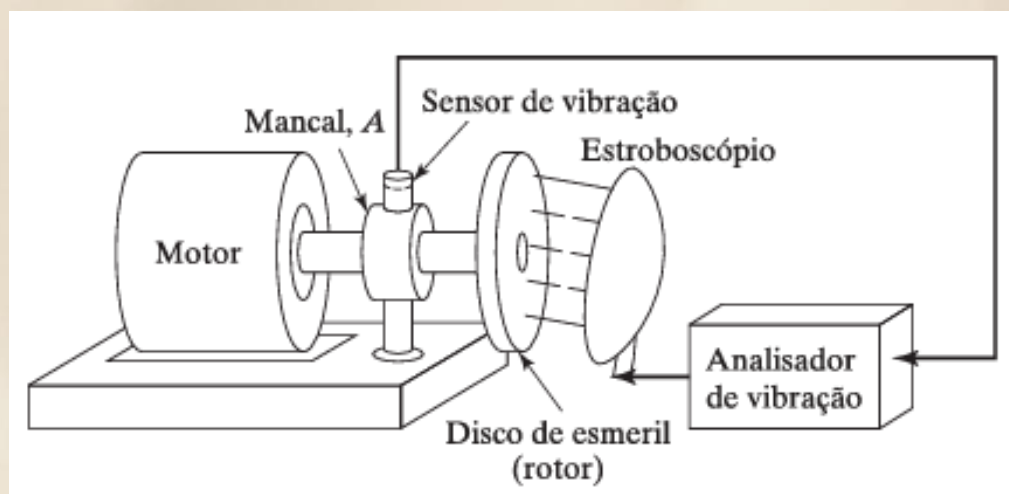


- ✈ A importância desse procedimento se reflete na preservação da integridade do maquinário, na diminuição do desgaste prematuro, na redução de ruídos e no aumento da eficiência energética, já que menos energia é desperdiçada em oscilações indesejadas.
- ✈ Além disso, o balanceamento contribui de maneira decisiva para a segurança operacional, pois máquinas que vibram excessivamente representam riscos de falhas catastróficas, especialmente em equipamentos críticos como turbinas, compressores e motores de aeronaves. A correção do desbalanceamento, portanto, não é apenas uma medida de manutenção, mas uma estratégia essencial de confiabilidade.
- ✈ Dentro da análise de controle de vibrações, ele se estabelece como um dos principais métodos preventivos, garantindo que o sistema opere dentro de limites aceitáveis de vibração e evitando que pequenas imperfeições de fabricação ou desgaste natural se transformem em grandes problemas ao longo do tempo.



Balanceamento

Aula 14





- ✈ O isolador de vibrações é um dispositivo utilizado na análise e no controle de vibrações mecânicas com a finalidade de reduzir ou impedir a transmissão de forças oscilatórias de uma fonte vibratória para uma estrutura ou componente sensível.
- ✈ Ele atua como uma barreira mecânica entre a fonte e o receptor, absorvendo parte da energia vibratória e permitindo que apenas uma fração mínima dessa energia seja transmitida.
- ✈ Fisicamente, o isolador pode ser constituído por elementos elásticos, como molas metálicas, elastômeros, borrachas ou até sistemas pneumáticos, que aproveitam suas propriedades de deformação para dissipar energia.
- ✈ Em alguns casos, isoladores combinam características de elasticidade com amortecimento, tornando-se ainda mais eficazes no controle de vibrações indesejadas.



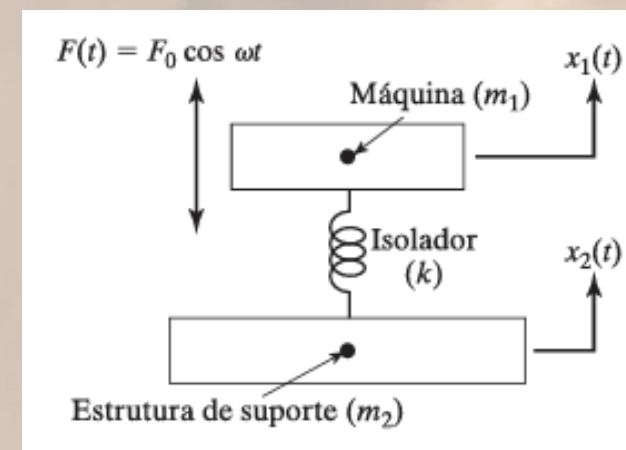
-  A importância do isolador está no fato de que muitas máquinas e equipamentos geram vibrações inevitáveis durante seu funcionamento, e essas vibrações, se não forem controladas, podem comprometer a precisão de instrumentos, causar desconforto humano, provocar ruídos excessivos e até danificar estruturas.
-  Em aplicações industriais, como em compressores, motores e geradores, os isoladores permitem que o sistema opere com maior estabilidade, preservando tanto a integridade das máquinas quanto a do ambiente em que estão inseridas.
-  Em áreas mais sensíveis, como laboratórios, hospitais e indústrias de alta precisão, eles são essenciais para garantir que vibrações externas não interfiram no desempenho de equipamentos delicados, como microscópios eletrônicos ou máquinas de medição por coordenadas.



Isolador de Vibrações

Aula 14

- Do ponto de vista da análise de vibrações, o isolador é projetado de acordo com a frequência natural do sistema, de forma que sua eficiência dependa da relação entre a frequência de excitação e a frequência natural do isolador.
- Quando essa relação é bem ajustada, o isolador consegue reduzir de maneira significativa a transmissão vibratória.
- Assim, o isolador de vibrações não é apenas um componente de proteção, mas um recurso de engenharia que integra cálculos matemáticos e escolhas de materiais adequados, garantindo maior confiabilidade, conforto e segurança nos mais variados sistemas mecânicos e estruturais.





Absorvedor Dinâmico de Vibrações

Aula 14

- 🌐 O absorvedor dinâmico de vibrações é um dispositivo projetado para reduzir ou eliminar vibrações indesejadas em sistemas mecânicos, funcionando como um elemento auxiliar que interage diretamente com a fonte vibratória.
- 🌐 Ele consiste essencialmente em uma massa secundária conectada ao sistema principal por meio de uma mola e, em alguns casos, de um amortecedor.
- 🌐 Seu princípio de funcionamento baseia-se na criação de uma ressonância controlada: quando o sistema principal é excitado em determinada frequência, o absorvedor é ajustado para vibrar na mesma frequência, mas de forma a gerar forças que se opõem às vibrações originais.
- 🌐 Dessa maneira, a energia vibratória é transferida para o absorvedor, reduzindo significativamente a amplitude de vibração do sistema principal.



Absorvedor Dinâmico de Vibrações

Aula 14

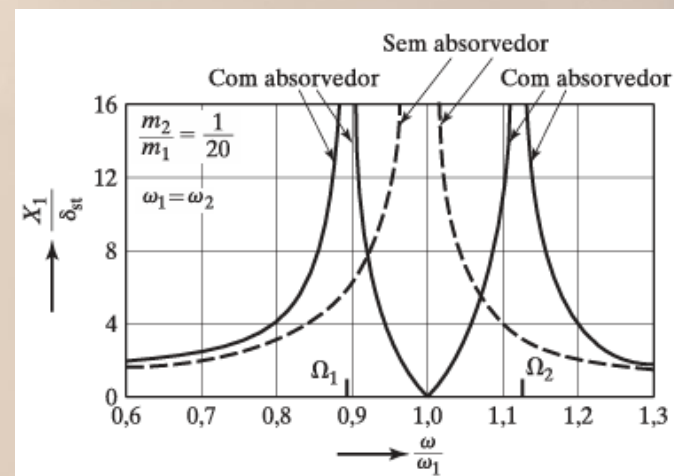
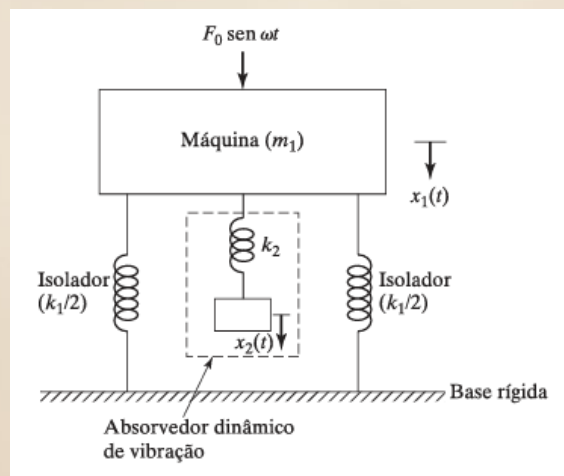
- ☉ Fisicamente, o absorvedor dinâmico se caracteriza por sua simplicidade e eficiência, desde que esteja devidamente sintonizado para a frequência específica de excitação.
- ☉ Essa sintonia é obtida através do ajuste da rigidez da mola e da massa secundária, de forma que sua frequência natural coincida com a frequência da vibração que se deseja combater.
- ☉ Entretanto, uma limitação prática é que sua atuação é altamente eficaz apenas em faixas de frequência estreitas, o que exige um projeto cuidadoso e um conhecimento preciso das condições de operação do sistema.
- ☉ Na prática, absorvedores dinâmicos são amplamente empregados em equipamentos industriais, turbinas, motores e até em estruturas civis como pontes e edifícios altos, onde vibrações causadas por ventos ou atividades sísmicas podem comprometer a estabilidade.



Absorvedor Dinâmico de Vibrações

Aula 14

- Além disso, também são aplicados em veículos, para aumentar o conforto e a segurança, reduzindo vibrações indesejadas transmitidas ao chassi e à carroceria.
- Dessa forma, o absorvedor dinâmico de vibrações se destaca como uma solução de engenharia que alia princípios físicos e matemáticos para transformar um fenômeno potencialmente destrutivo em algo controlado e administrável, garantindo desempenho, confiabilidade e durabilidade a sistemas mecânicos e estruturais.



Obrigado Pela Atenção

Nos Encontramos na Próxima Aula





Aula - 15

Medição de Vibrações



Conteúdos Abordados Nessa Aula

Aula 15



Medição de Vibrações.



- ✈ A medição de vibrações é o processo de quantificação dos movimentos oscilatórios que ocorrem em um sistema mecânico, seja em termos de deslocamento, velocidade ou aceleração.
- ✈ Essa prática permite transformar fenômenos dinâmicos em dados objetivos que podem ser analisados matematicamente e interpretados de maneira técnica, fornecendo informações essenciais sobre o comportamento vibratório de máquinas, estruturas e componentes.
- ✈ A medição é realizada por meio de instrumentos específicos, como acelerômetros, transdutores de velocidade e sensores de deslocamento, que captam os sinais vibratórios e os convertem em grandezas físicas passíveis de estudo.
- ✈ Dessa forma, torna-se possível identificar as características dinâmicas do sistema, como frequências naturais, amplitudes de oscilação e presença de fenômenos de ressonância.



- ✈ A realização da medição de vibrações é fundamental porque, sem ela, a análise de vibrações mecânicas permaneceria restrita a modelos teóricos e aproximações, sem comprovação prática.
- ✈ Em sistemas industriais, por exemplo, a medição possibilita diagnosticar falhas incipientes, como desalinhamentos, desbalanceamentos, folgas mecânicas e desgaste de componentes, antes que essas condições evoluam para problemas graves que podem levar à parada de máquinas ou acidentes.
- ✈ Além disso, ao medir vibrações, é possível verificar a eficiência de soluções aplicadas, como o uso de isoladores, absorvedores dinâmicos ou técnicas de balanceamento, garantindo que as medidas de controle realmente estejam desempenhando sua função.



- ✈ Outro motivo essencial para a realização dessa prática é a garantia de segurança e conforto, especialmente em equipamentos de transporte, estruturas civis e sistemas que envolvem interação humana.
- ✈ Vibrações excessivas podem comprometer a integridade estrutural, causar fadiga em materiais e reduzir a vida útil de máquinas, além de gerar desconforto em ocupantes ou operadores.
- ✈ Assim, a medição se torna uma ferramenta indispensável tanto para a manutenção preditiva e preventiva quanto para a validação de projetos, permitindo que sistemas vibratórios sejam monitorados em tempo real e que medidas corretivas sejam aplicadas de forma precisa.
- ✈ Em síntese, a medição de vibrações é o elo entre teoria e prática, constituindo-se como um dos pilares centrais na análise de vibrações mecânicas.



- ✈ Na medição de vibrações durante a análise de vibrações mecânicas, alguns parâmetros são considerados essenciais, pois permitem descrever de forma completa o comportamento dinâmico de um sistema.
- ✈ O primeiro deles é o deslocamento, que representa a variação da posição da massa em relação ao seu ponto de equilíbrio. Esse parâmetro é fundamental para identificar a magnitude da vibração em termos físicos e é especialmente importante em baixas frequências, quando os movimentos são mais perceptíveis em grandes amplitudes.
- ✈ O segundo parâmetro relevante é a velocidade, que indica a taxa de variação do deslocamento no tempo e está diretamente relacionada ao nível de energia vibratória transmitida. A medição da velocidade é bastante utilizada na indústria por fornecer uma visão prática sobre a severidade das vibrações em máquinas rotativas e por permitir a aplicação de normas de aceitação internacionalmente reconhecidas.



-  O terceiro parâmetro essencial é a aceleração, que corresponde à taxa de variação da velocidade no tempo e está associada às forças dinâmicas que atuam sobre o sistema.
-  Ela se torna particularmente importante em altas frequências, onde os esforços mecânicos gerados pelas vibrações podem comprometer a integridade estrutural e causar fadiga em componentes.
-  Além desses parâmetros principais, a frequência também desempenha papel crucial, pois revela a periodicidade do movimento vibratório e permite a identificação de fenômenos como ressonância e excitações forçadas.
-  O espectro de frequências, obtido por meio de técnicas como a transformada de Fourier, fornece informações detalhadas sobre quais frequências estão presentes e em que intensidade, facilitando o diagnóstico de falhas específicas.



Parâmetros Essenciais na Medição de Vibrações

Aula 15

- ☉ A fase, embora menos intuitiva, também é um parâmetro relevante, pois mostra a relação temporal entre duas vibrações medidas em diferentes pontos de um sistema.
- ☉ Essa informação auxilia na detecção de problemas como desalinhamentos ou assimetrias em componentes rotativos. Juntos, esses parâmetros permitem que a medição de vibrações seja muito mais do que uma simples quantificação de movimento, tornando-se uma ferramenta precisa de diagnóstico, prevenção de falhas e validação de soluções aplicadas.
- ☉ Dessa forma, deslocamento, velocidade, aceleração, frequência e fase constituem o conjunto essencial de grandezas que fundamentam a análise completa do comportamento vibratório de sistemas mecânicos.





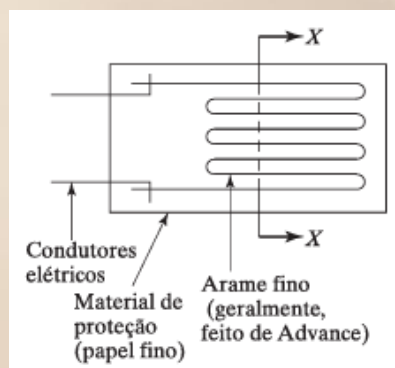
- ✈ Um transdutor é um dispositivo capaz de converter uma forma de energia em outra, permitindo que grandezas físicas que não podem ser medidas diretamente sejam transformadas em sinais elétricos passíveis de interpretação e análise.
- ✈ No contexto da análise de vibrações mecânicas, o transdutor é o elemento fundamental que possibilita a captação do movimento vibratório de um sistema e sua posterior tradução em dados quantificáveis.
- ✈ Ao ser acoplado a uma máquina, estrutura ou componente em estudo, o transdutor responde às variações de deslocamento, velocidade ou aceleração e gera um sinal elétrico proporcional a essas grandezas.
- ✈ Esse sinal pode então ser processado e exibido em instrumentos de leitura ou sistemas computacionais, permitindo a avaliação detalhada do comportamento vibratório.



- ✈ Na prática, diferentes tipos de transdutores são empregados de acordo com a natureza da medição. Acelerômetros, por exemplo, utilizam o princípio piezoelétrico para gerar cargas elétricas proporcionais às acelerações sofridas, sendo amplamente utilizados devido à sua sensibilidade e capacidade de atuar em uma ampla faixa de frequências.
- ✈ Transdutores de velocidade baseiam-se em leis eletromagnéticas, onde a movimentação relativa entre uma bobina e um campo magnético induz uma tensão proporcional à velocidade da vibração.
- ✈ Já os transdutores de deslocamento, geralmente de natureza indutiva, capacitativa ou óptica, são mais adequados para baixas frequências e permitem avaliar grandes amplitudes de oscilação.



- ✈ O uso do transdutor na medição de vibrações não apenas viabiliza a obtenção de dados precisos, mas também garante a confiabilidade das análises, uma vez que a transformação da energia mecânica em sinais elétricos minimiza a influência de erros humanos e possibilita a utilização de técnicas avançadas de processamento de sinais.
- ✈ Isso se traduz em diagnósticos mais eficientes, identificação de falhas incipientes e monitoramento em tempo real do comportamento de sistemas mecânicos complexos.
- ✈ Assim, o transdutor representa a ponte entre o fenômeno físico da vibração e a sua interpretação científica, sendo peça indispensável para qualquer análise moderna de vibrações mecânicas.





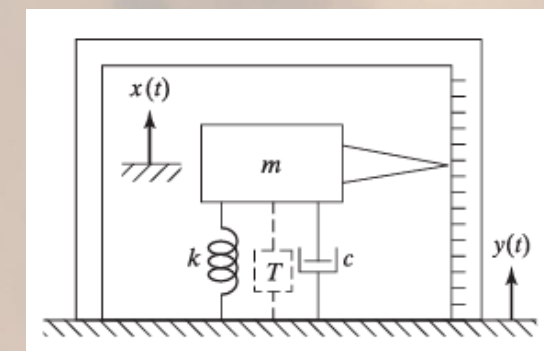
- 🌐 Sensores de vibração são dispositivos projetados para detectar e quantificar o movimento oscilatório de um sistema mecânico, transformando essa informação em sinais que podem ser interpretados e analisados para fins de diagnóstico e monitoramento.
- 🌐 Diferentemente do transdutor, que é um termo mais amplo associado à conversão de energia, o sensor de vibração é especificamente desenvolvido para captar variações de deslocamento, velocidade ou aceleração, fornecendo dados precisos sobre a intensidade e a frequência das vibrações.
- 🌐 Ele funciona como os “olhos” da análise de vibrações, permitindo que fenômenos dinâmicos invisíveis a olho nu sejam transformados em informações objetivas e comparáveis.
- 🌐 Na prática, os sensores de vibração são aplicados em uma grande variedade de situações industriais e estruturais.



-  Os acelerômetros, por exemplo, são os mais utilizados devido à sua ampla faixa de operação e alta sensibilidade, sendo capazes de medir acelerações que, posteriormente, podem ser integradas para se obter velocidade e deslocamento.
-  Eles são amplamente empregados no monitoramento de máquinas rotativas, como motores, turbinas e compressores, permitindo identificar problemas como desbalanceamento, desalinhamento e falhas em rolamentos.
-  Sensores de velocidade, por sua vez, utilizam princípios eletromagnéticos para gerar sinais proporcionais ao movimento e são bastante usados em equipamentos que trabalham em faixas intermediárias de frequência.
-  Já os sensores de deslocamento, geralmente indutivos, capacitivos ou ópticos, são aplicados quando é necessário medir diretamente variações de posição em baixas frequências e com grandes amplitudes.



- ✈ A aplicação dos sensores de vibração na análise de vibrações mecânicas é fundamental porque eles fornecem a base experimental para a interpretação de modelos teóricos, além de permitir o acompanhamento em tempo real do desempenho de sistemas mecânicos.
- ✈ A partir dos dados coletados, é possível construir espectros de frequência, identificar fenômenos de ressonância, quantificar amplitudes críticas e adotar medidas corretivas antes que ocorram falhas graves.
- ✈ Dessa forma, os sensores de vibração não apenas auxiliam no entendimento do comportamento dinâmico dos sistemas, mas também representam ferramentas indispensáveis para a manutenção preditiva, o aumento da confiabilidade operacional e a segurança de máquinas e estruturas.





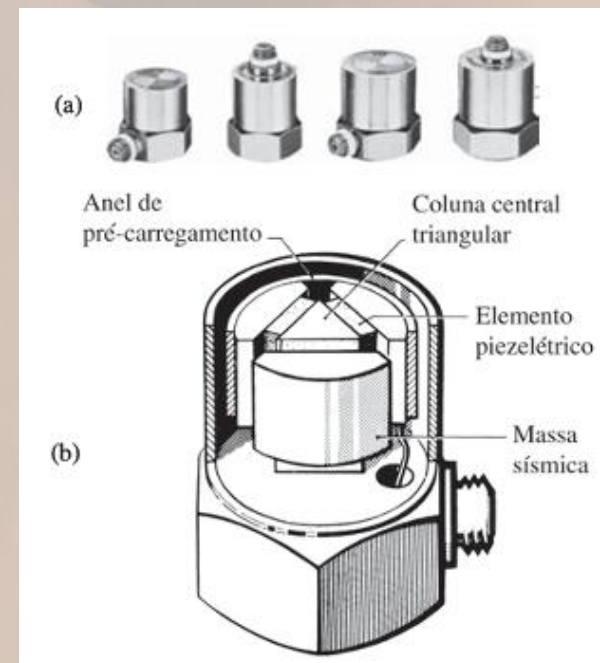
-  O acelerômetro é um dispositivo de medição utilizado para captar acelerações resultantes de movimentos vibratórios em sistemas mecânicos, transformando-as em sinais elétricos que podem ser analisados de forma quantitativa.
-  Ele funciona a partir de princípios físicos que relacionam a inércia de uma massa sensível a variações de aceleração. Entre os tipos mais comuns, destacam-se os piezoelétricos, nos quais cristais especiais geram uma carga elétrica proporcional à força exercida sobre eles pela massa interna quando submetida a uma aceleração.
-  Esse sinal elétrico, posteriormente amplificado e processado, fornece informações diretas sobre a aceleração do sistema em estudo, podendo também ser integrado matematicamente para determinar a velocidade e o deslocamento.



- ✈ Na análise de vibrações mecânicas, o acelerômetro é amplamente aplicado devido à sua versatilidade e capacidade de operar em uma ampla faixa de frequências, o que o torna adequado tanto para medições de baixa intensidade quanto para situações de vibrações severas.
- ✈ Em máquinas rotativas, por exemplo, ele é utilizado para identificar falhas incipientes como desbalanceamentos, desalinhamentos e defeitos em rolamentos, por meio da análise espectral das acelerações medidas.
- ✈ Em estruturas civis, como pontes e edifícios, os acelerômetros permitem monitorar respostas vibratórias causadas por vento, tráfego ou eventos sísmicos, auxiliando na avaliação da integridade estrutural. Além disso, em veículos automotivos e aeronaves, eles são empregados para estudar o conforto dos passageiros e otimizar sistemas de suspensão e amortecimento.



- ❁ O uso de acelerômetros é essencial porque a aceleração está diretamente relacionada às forças dinâmicas atuantes em um sistema, o que torna sua medição uma forma precisa de compreender o impacto das vibrações sobre componentes e estruturas.
- ❁ Por meio dos sinais obtidos, engenheiros podem identificar frequências naturais, verificar condições de ressonância e propor medidas de controle adequadas.
- ❁ Assim, o acelerômetro não apenas se configura como um sensor de alta confiabilidade, mas também como um elo indispensável entre o fenômeno físico das vibrações e sua interpretação matemática e prática, garantindo maior segurança, eficiência e durabilidade em sistemas mecânicos e estruturais.





-  O estroboscópio é um instrumento óptico utilizado para observar e medir movimentos periódicos de alta velocidade, tornando visíveis fenômenos que, a olho nu, seriam imperceptíveis devido à rapidez das oscilações.
-  Ele funciona a partir da emissão de flashes de luz em frequências ajustáveis, de modo que, quando a frequência da luz emitida coincide ou se aproxima da frequência do movimento vibratório, o objeto em oscilação parece estar parado ou se movimentando de forma lenta.
-  Esse efeito visual, conhecido como efeito estroboscópico, possibilita analisar vibrações e rotações sem a necessidade de contato físico com o sistema em estudo, preservando a integridade do equipamento e fornecendo informações valiosas sobre o comportamento dinâmico.



-  Na análise de vibrações mecânicas, o estroboscópio é aplicado principalmente para medir a frequência de vibração ou de rotação de máquinas e componentes, sendo bastante utilizado em sistemas rotativos como eixos, polias, turbinas e motores.
-  Por meio dele, é possível identificar pontos de desbalanceamento, folgas ou deformações, já que o movimento aparente desacelerado permite observar irregularidades superficiais e comportamentos anômalos.
-  Além disso, o estroboscópio facilita a detecção de ressonâncias, uma vez que torna visível o aumento das amplitudes vibratórias em determinadas condições de excitação.



Estroboscópio

Aula 15

- ✪ A grande vantagem do uso do estroboscópio é que ele possibilita medições e observações sem interromper o funcionamento da máquina, oferecendo uma análise em tempo real das vibrações sem a necessidade de desmontagens ou contato direto.
- ✪ Essa característica o torna um recurso prático e eficaz em ambientes industriais, especialmente em atividades de manutenção preditiva e preventiva.
- ✪ Assim, o estroboscópio, ao transformar movimentos invisíveis em fenômenos visíveis e interpretáveis, desempenha papel relevante na análise de vibrações mecânicas, auxiliando engenheiros e técnicos a compreenderem melhor o comportamento de sistemas dinâmicos e a adotarem medidas de correção e controle de forma precisa e segura.





Excitadores Mecânicos de Vibrações

Aula 15

-  Excitadores mecânicos de vibração são dispositivos projetados para gerar vibrações controladas em sistemas ou estruturas, com o objetivo de reproduzir condições dinâmicas específicas e possibilitar a medição e análise do comportamento vibratório.
-  Esses equipamentos aplicam forças periódicas de intensidade e frequência ajustáveis, geralmente por meio de mecanismos rotativos excêntricos, atuadores eletrodinâmicos ou hidráulicos, que induzem o sistema a oscilar de maneira controlada.
-  Dessa forma, o excitador cria um ambiente de teste em que é possível estudar a resposta dinâmica de uma máquina, componente ou estrutura, permitindo identificar parâmetros fundamentais como frequências naturais, modos de vibração, amortecimento e comportamento em condições de ressonância.



Excitadores Mecânicos de Vibrações

Aula 15

-  Na análise de vibrações mecânicas, os excitadores são aplicados em ensaios experimentais destinados a complementar ou validar modelos matemáticos e computacionais.
-  Por exemplo, em testes de laboratório, eles podem ser acoplados a vigas, placas, chassis de veículos ou componentes de aeronaves para medir a resposta do sistema a diferentes excitações harmônicas ou aleatórias.
-  Em campo, excitadores portáteis são utilizados para avaliar a integridade estrutural de máquinas e instalações, permitindo observar como o sistema se comporta sob diferentes condições de carregamento dinâmico.
-  Essa aplicação é essencial para prever falhas, dimensionar corretamente isoladores e absorvedores de vibração, além de auxiliar no desenvolvimento de estratégias de controle.



Excitadores Mecânicos de Vibrações

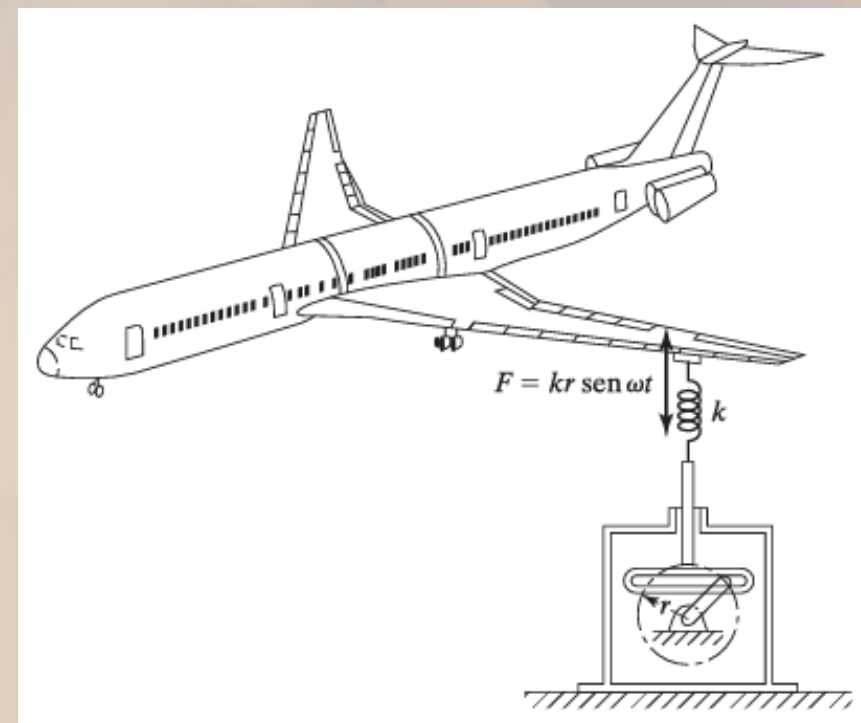
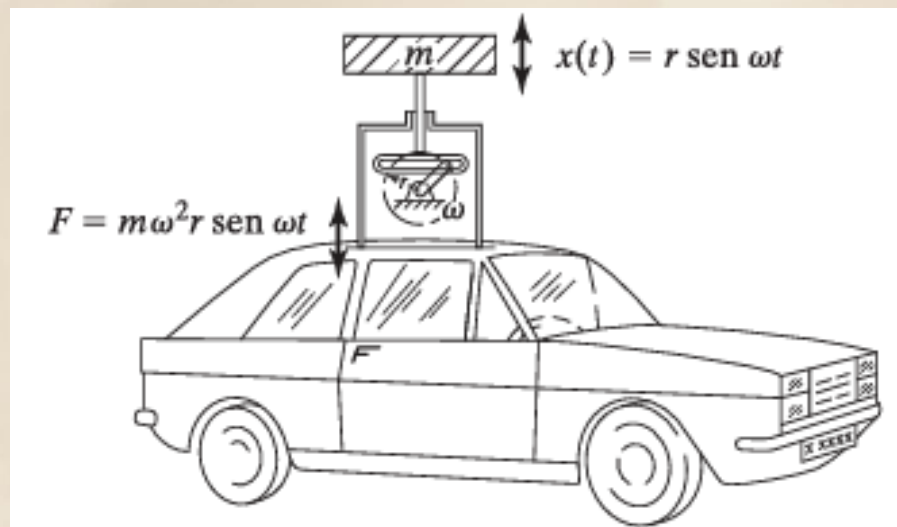
Aula 15

- ✈ A grande vantagem dos excitadores mecânicos está na possibilidade de reproduzir vibrações de forma controlada e repetitiva, o que garante maior precisão nos ensaios e na coleta de dados.
- ✈ Com sua utilização, torna-se viável a aplicação de sensores e acelerômetros em pontos específicos do sistema, registrando deslocamentos, velocidades e acelerações para posterior análise espectral.
- ✈ Assim, os excitadores mecânicos de vibração representam uma ferramenta indispensável no estudo experimental da dinâmica de sistemas, pois permitem não apenas compreender como as vibrações se manifestam, mas também antecipar problemas e validar soluções de engenharia em situações práticas.



Excitadores Mecânicos de Vibrações

Aula 15





Ensaaios Dinâmicos de Vibrações

Aula 15

- Os ensaios dinâmicos de vibrações em máquinas e estruturas são procedimentos experimentais realizados com o objetivo de avaliar o comportamento vibratório de um sistema quando submetido a diferentes condições de excitação.
- Eles consistem em aplicar estímulos controlados, que podem ser forças periódicas, impulsos ou até mesmo excitações aleatórias, e medir a resposta do sistema por meio de sensores, como acelerômetros, transdutores de velocidade ou deslocamento.
- Esses ensaios permitem identificar características fundamentais, como frequências naturais, modos de vibração, níveis de amortecimento e condições de ressonância, fornecendo dados práticos que complementam a análise teórica e a modelagem matemática.
- O processo pode ser realizado tanto em laboratório, em condições controladas, quanto em campo, diretamente em máquinas e estruturas em operação.



- ✈ Na prática, os ensaios dinâmicos podem ser conduzidos de diferentes formas. Um dos métodos mais comuns é o ensaio de excitação forçada, no qual um excitador mecânico, eletrodinâmico ou hidráulico aplica vibrações de intensidade e frequência variáveis ao sistema, enquanto sensores registram sua resposta.
- ✈ Outro método amplamente utilizado é o ensaio de impacto, em que um martelo instrumentado aplica um pulso de força no sistema, gerando um espectro de frequências que permite analisar o comportamento dinâmico a partir da resposta captada.
- ✈ Em estruturas de grande porte, como pontes, edifícios ou aeronaves, também podem ser realizados ensaios sob excitações ambientais, utilizando as próprias vibrações induzidas por vento, tráfego ou atividade operacional como estímulos naturais para medição.

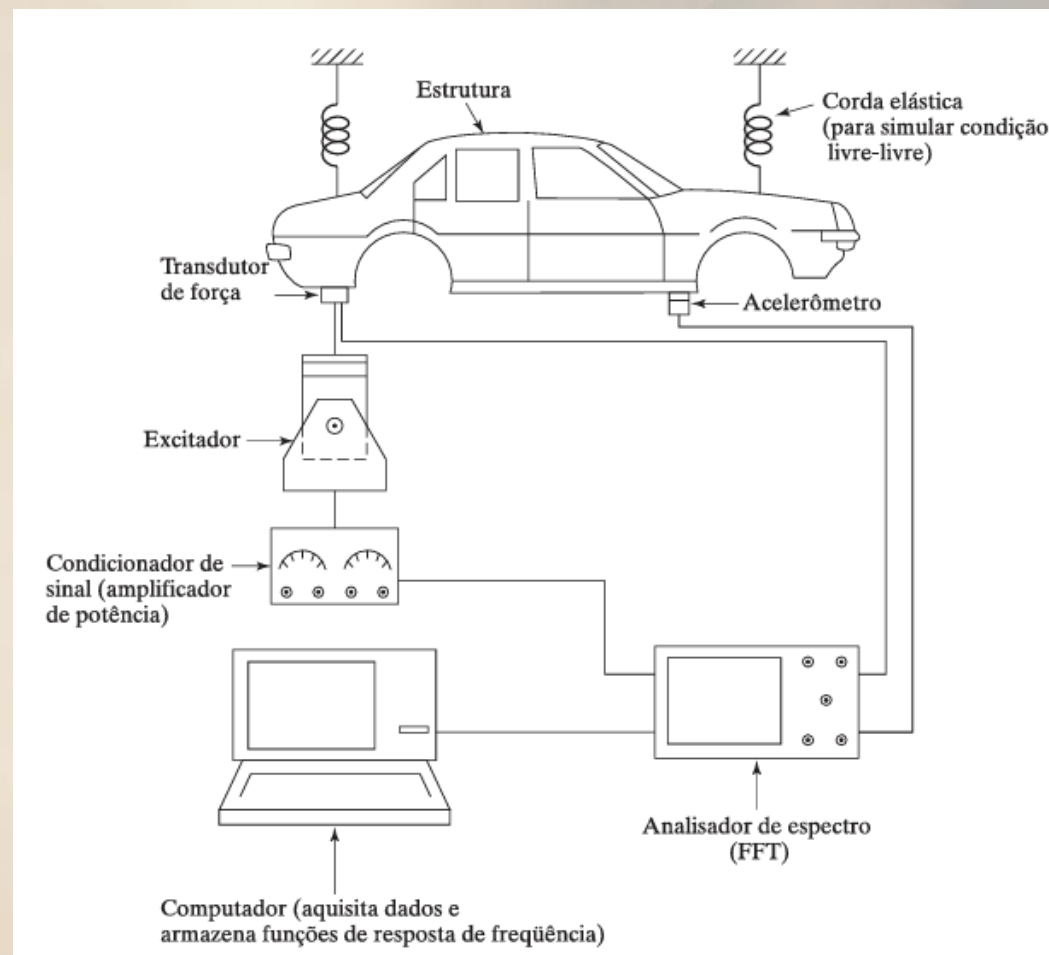


- ✈ A aplicação desses ensaios na medição de vibrações é de grande relevância, pois possibilita não apenas identificar defeitos ou falhas incipientes, mas também verificar se o desempenho real do sistema corresponde ao esperado em projeto.
- ✈ Em máquinas rotativas, por exemplo, os ensaios dinâmicos permitem detectar problemas como desbalanceamento, desalinhamento ou folgas internas, enquanto em estruturas civis podem avaliar riscos de colapso devido a fenômenos de ressonância.
- ✈ Além disso, esses ensaios são amplamente empregados na validação de técnicas de controle de vibração, como o uso de isoladores, absorvedores dinâmicos e sistemas de amortecimento.
- ✈ Dessa forma, os ensaios dinâmicos de vibrações se consolidam como ferramentas indispensáveis na engenharia, fornecendo dados experimentais que garantem maior confiabilidade, segurança e durabilidade a máquinas e estruturas.



Ensaio Dinâmicos de Vibrações

Aula 15



Obrigado Pela Atenção

Nos Encontramos na Próxima Aula





Aula - 16

Análise de Vibrações em Máquinas Industriais



Conteúdos Abordados Nessa Aula

Aula 16

-  Análise de Vibrações em Máquinas Industriais;
-  Método Pico, Pico a Pico, RMS;
-  Método Curtose e Skewness;
-  Método de Análise Espectral.



- ✈ A análise de vibração em máquinas industriais é uma técnica constantemente utilizada para monitorar e diagnosticar o comportamento dos ativos durante a operação e avaliar seu estado de funcionamento.
- ✈ Desse modo, essa análise se dá a partir da detecção e medição das variações de vibrações. Inclusive, indica-se para vários equipamentos como motores, bombas, roletes, turbinas, entre outros.
- ✈ Através da análise de vibração, é possível identificar falhas em estágios iniciais, ou seja, ainda em fase de falha potencial e a ação imediata evitará uma falha funcional do ativo.
- ✈ Dessa forma, isso torna a ação para medidas corretivas mais rápida e menos impactante no dia a dia do chão de fábrica, além de reduzir a chance de falhas graves e otimizar os intervalos de manutenção.



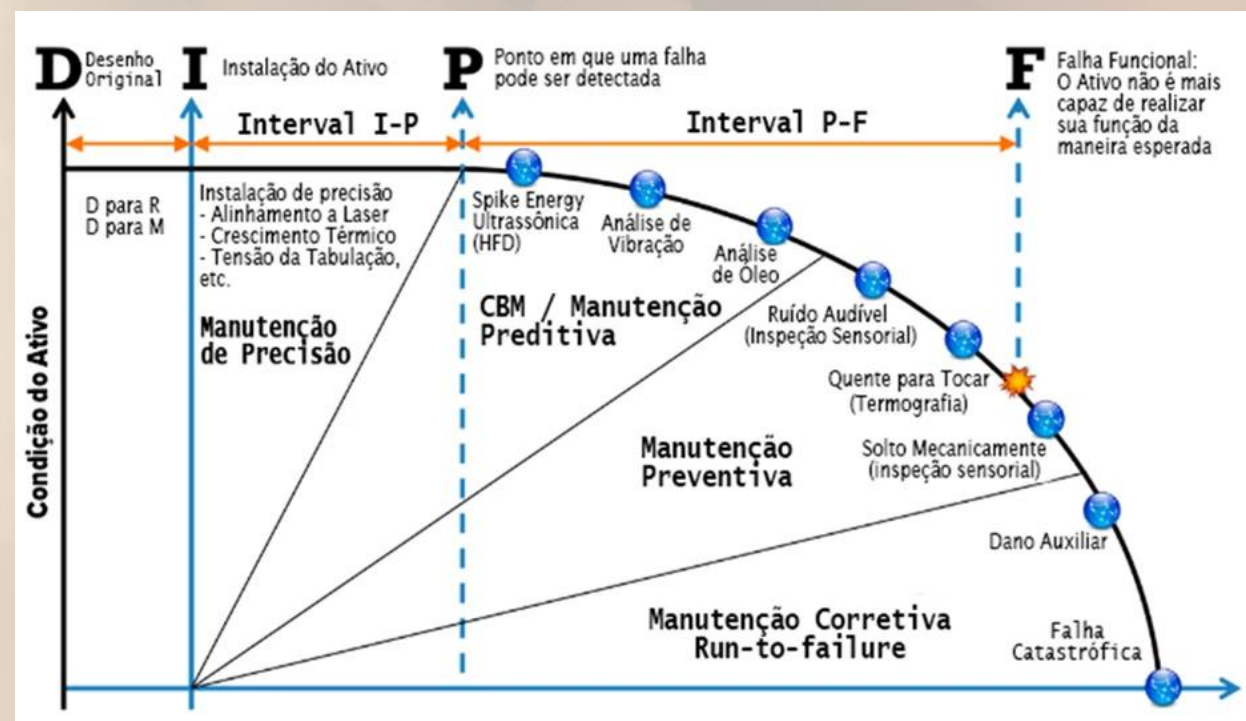
- ☉ Todas essas ações estão diretamente relacionadas a redução dos custos de manutenção, aumento da confiabilidade e vida útil dos ativos, ou seja, impactam diretamente no faturamento da empresa e na segurança dos colaboradores.
- ☉ Ao utilizarmos Análise de vibração como técnica de Manutenção Preditiva, podemos de maneira assertiva aplicar a estratégia conhecida como CBM que é a Manutenção baseada em condição, ou seja, a análise de vibração nos dará parâmetros para avaliar se precisamos fazer uma intervenção ou não do ativo baseado na condição apresentada.
- ☉ Esse fator está diretamente relacionado por exemplo, ao controle de custos operacionais para manutenção.



Curva DIPF

Aula 16

- ✈ A análise de vibração é uma das técnicas mais difundidas e eficazes na detecção de falhas potenciais em ativos rotativos.
- ✈ Ela faz parte da manutenção preditiva, como pode ser visto na conhecida curva DIPF. A curva apresenta as diferentes fases que um ativo percorre, desde seu design até o fim da vida útil.
- ✈ A DIPF é uma generalização da curva PF, a qual considera também a fase projeto e comissionamento do equipamento.



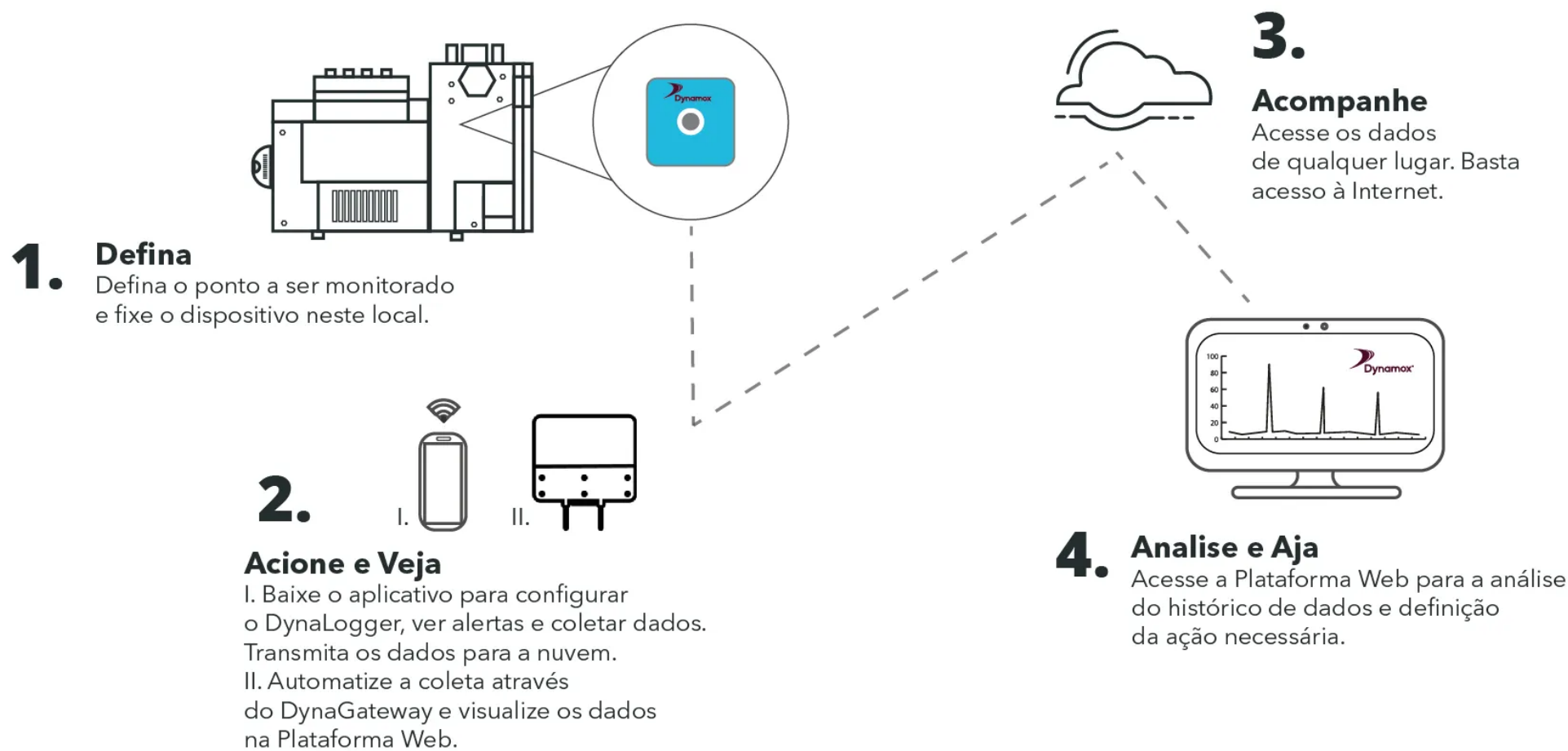


- ✈ O primeiro passo para realizar a análise de vibração está em coletar os dados vibracionais dos ativos.
- ✈ Por isso, hoje, podemos utilizar a tecnologia a nosso favor. A coleta realizada com sensores triaxiais, por exemplo, é a maneira mais segura e confiável para a coleta assertiva.
- ✈ Colocados em pontos estratégicos das máquinas, os sensores realizam a coleta de dados tanto de forma manual como automática, conseguindo, através da vibração, identificar tendências.
- ✈ Após a coleta, esses dados são transformados em frequência, sendo possível identificá-los através da análise espectral. Essa análise atua na identificação de diferentes frequências presentes na vibração. Determinando, assim, se há picos ou parâmetros anormais, que seriam Indícios de falhas potenciais.
- ✈ Com base nessas coletas e análises comparam-se estas com os critérios básicos de aceitação da máquina. Assim, possibilitando a realização de um diagnóstico completo sobre sua condição.



Modelo Idealizado de Análise de Vibrações

Aula 16





Detecção Precoce de Falhas

Aula 16

- ✈ A análise de vibração é uma técnica fundamental da manutenção preditiva.
- ✈ É através do monitoramento regular das vibrações de máquinas industriais, que é possível identificar padrões e tendências que indicam mudanças significativas como desgaste, desalinhamento e desbalanceamento, responsáveis pela ocorrência de falhas.
- ✈ É com base nessas informações do monitoramento que as equipes podem realizar manutenções de maneira planejada, evitando paradas e falhas inesperadas



- ✈ Manter a confiabilidade dos equipamentos é um benefício importante para o setor de manutenção.
- ✈ Isso porque, consiste na premissa de que, em um período determinado de tempo e dentro de condições pré-estabelecidas o equipamento realizará a programação esperada, sem falhas.
- ✈ A confiabilidade dos equipamentos possui impacto direto também na saúde da planta, já que ela varia de acordo com as intercorrências que acontecem ou não, na manutenção.



Maior Eficiência na Rotina Operacional

Aula 16

- ✈ Um dos principais ganhos da análise de vibração, está na capacidade de proporcionar uma ação rápida para resolução de problemas. Isso gera oportunidade para a equipe de manutenção trabalhar de maneira proativa, evitando problemas maiores que possam comprometer na segurança ou nos custos da operação.
- ✈ Hoje existem ferramentas, que conseguem agregar dados das rotas de inspeção e da análise preditiva para gerar dashboards que ajudam a ter uma visualização completa dos fluxos.
- ✈ Deixando claro quais são os pontos em que a equipe precisa agir e os impactos no processo como um todo.

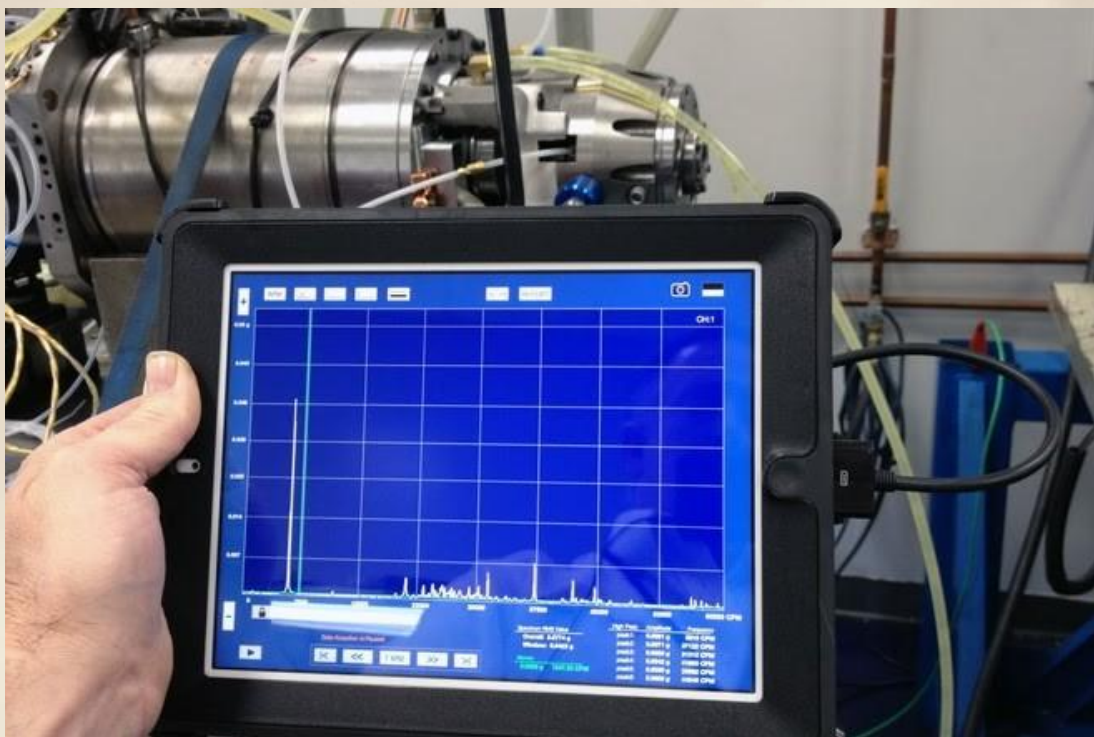


- ✈ A gestão dos custos de manutenção industrial são fatores determinantes para manter o equilíbrio financeiro das empresas. Isso porque, quando este processo se torna pouco eficiente, criam-se gastos desnecessários capazes de prejudicar o orçamento e dificultar a criação de novos projetos.
- ✈ Neste contexto, a análise de vibração se torna aliada. Isso porque é através da detecção precoce de falhas que se pode realizar a manutenção de forma programada.
- ✈ Evitando, assim, reparos de emergência e permitindo que a substituição de peças ou máquinas ocorram apenas quando necessário permitindo o uso da estratégia de manutenção baseada em condição (CBM).
- ✈ Estima-se que o custo em manutenção possui impacto importante de faturamento na Indústria. Isto representa a economia de um valor relevante mediante ações preventivas.



Exemplos de Análise de Vibrações

Aula 16

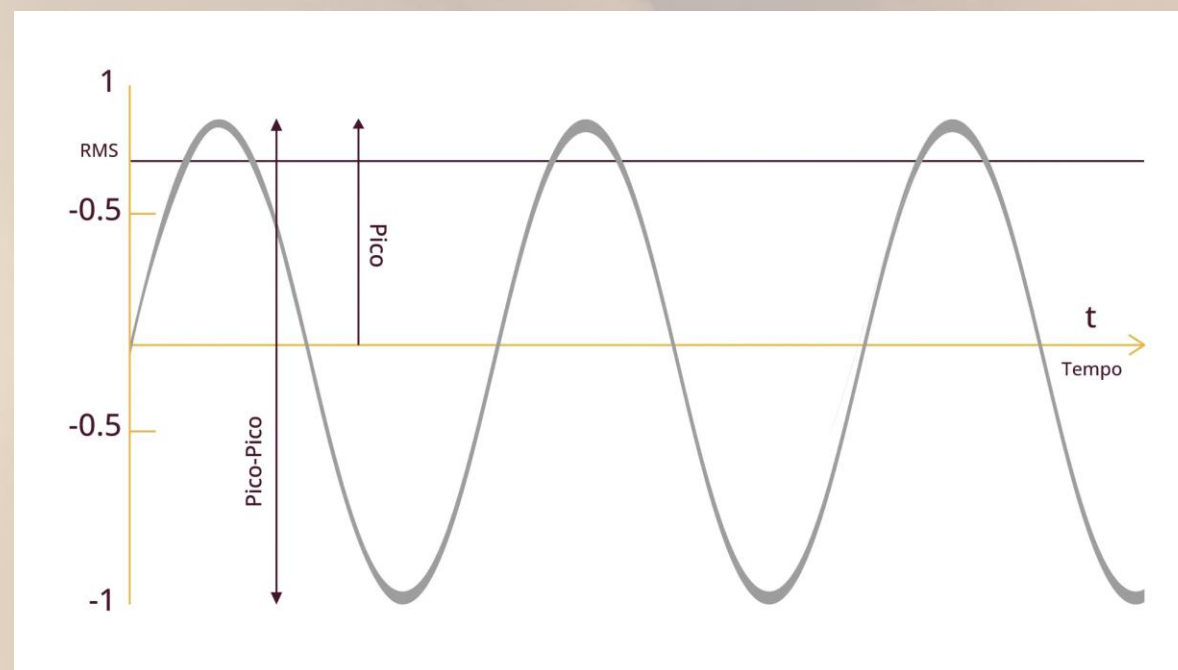




Métrica de Análise – Pico, Pico a Pico, RMS

Aula 16

- Na análise de vibração, interpretar corretamente os sinais de um ativo como Pico, Pico a Pico e RMS, sendo capaz de agir sobre eles é crucial para o sucesso da manutenção preditiva.
- Em geral, a interpretação envolve a análise de sinais de vibração no domínio do tempo, ou seja, plotadas em um eixo t .
- Dessa forma, é possível analisar mudanças ou padrões de vibração por meio de parâmetros distintos.





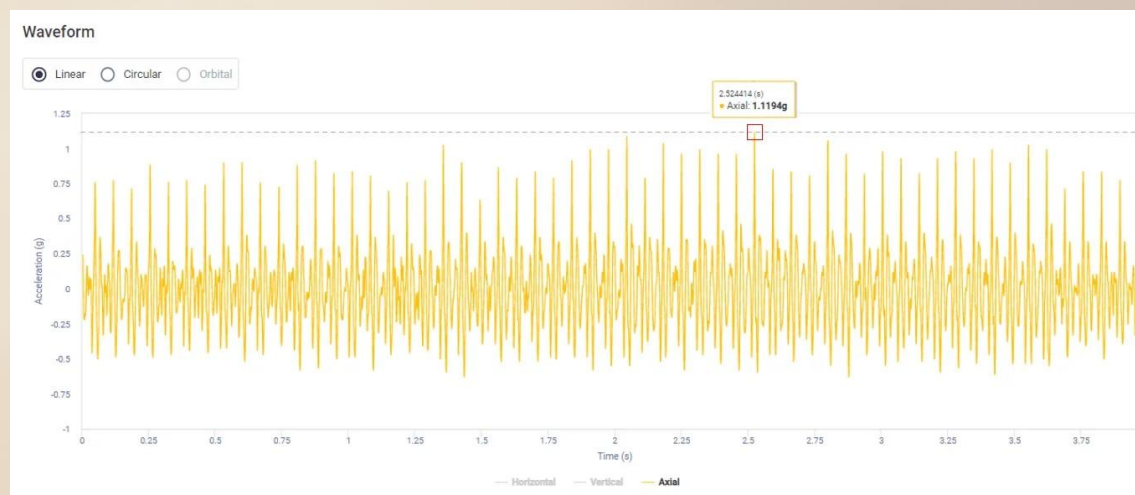
- ✈ Este é o valor da maior amplitude presente no sinal, também chamado de valor verdadeiro de pico (“True peak value”) em muitas plataformas.
- ✈ Seu aumento pode indicar o surgimento de impactos no sinal.
- ✈ O valor de pico representa algo pontual e não leva em conta a energia total do sinal, ou seja, qualquer flutuação ou vibração transiente de maior valor pode influenciar nessa métrica.



Valor de Pico

Aula 16

- Consideremos como exemplo, o mancal de um tambor de descarga de uma correia transportadora apresenta amplitudes de vibração próximas a um 1 g, com o eixo axial apresentando valores mais elevados.
- Ao analisarmos de maneira detalhada, podemos observar que o pico deste sinal de duração de 4s, corresponde a 1,1194 g ocorrido no tempo 2,52s. Observe que nesse caso nenhuma outra parte do sinal importa, já que o valor de pico é somente o valor de maior amplitude.





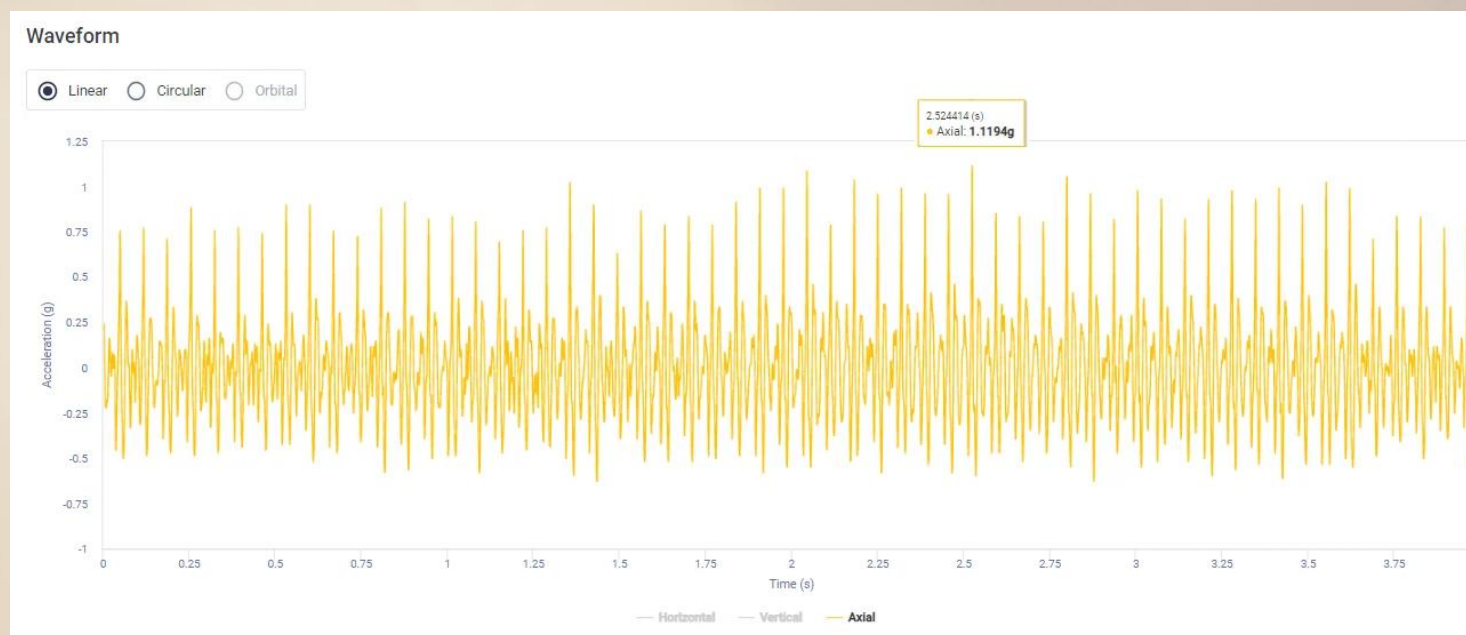
- 🌐 Outra métrica complementar é o valor de Pico a Pico. Esse valor é a medida do pico mínimo ao pico máximo do sinal.
- 🌐 Assim como o valor de pico, o seu aumento pode indicar o surgimento de impactos.
- 🌐 Da mesma forma, a amplitude Pico a Pico não fornece nenhuma informação sobre a quantidade de energia dentro do sinal de vibração, fornece apenas informação sobre os maiores e menores valores.



Valor de Pico a Pico

Aula 16

- Seguindo no exemplo anterior, é possível observar que o maior valor é de 1,1194 g, enquanto o menor valor corresponde a -0,6306 g, ocorrido no momento 2,87s do sinal.
- Ao calcularmos a distância de um ponto ao outro obtemos um valor de Pico a Pico de 1,75 g para o eixo axial.

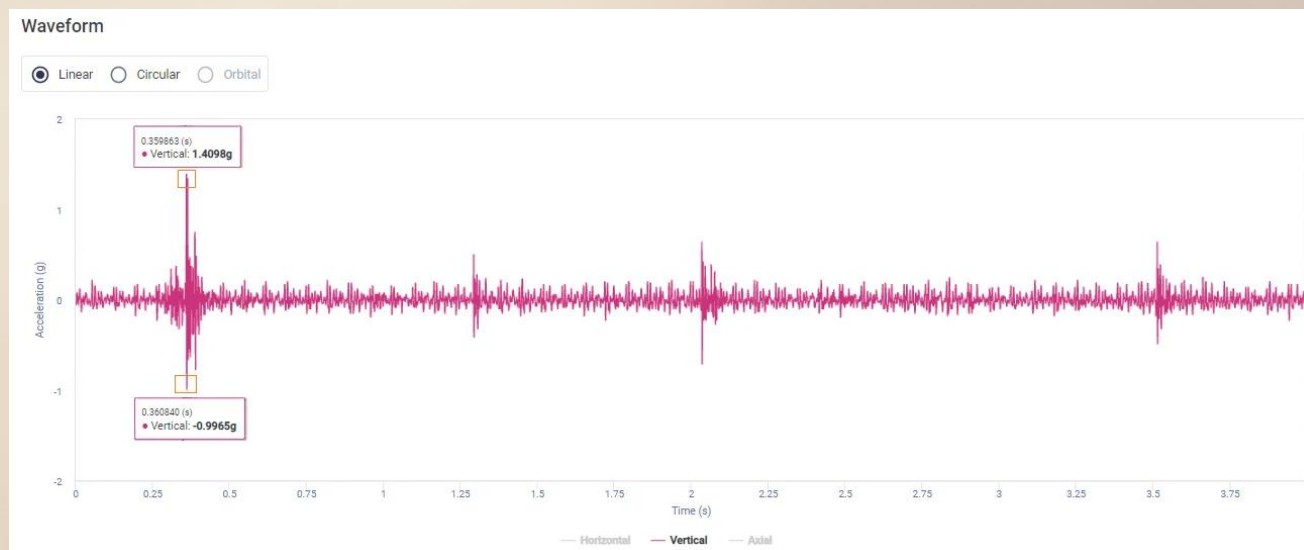




Valor de Pico a Pico

Aula 16

- Veja novamente que o restante do sinal não importa. Um exemplo mais claro disso é o sinal a seguir onde podemos ver impactos ainda mais significativos. Perceba como esses impactos destoam do restante do sinal e fornecem um valor de Pico a Pico final de: $1,4099 \text{ g} + 0,9965 = 2,4064 \text{ g}$.
- A métrica Pico a Pico é essencial para monitoramento de equipamentos de baixa rotação. Ativos desse tipo geralmente apresentam baixas amplitudes de vibração/baixos valores de energia, o que dificulta uso de métricas como RMS (falaremos mais a seguir) e favorece o uso de métricas como as picos ou pico a pico.





RMS (Root Mean Square)

Aula 16

- Foram apresentadas duas métricas que atuam pontualmente com valores máximos e são uma boa representatividade de impactos.
- Entretanto, faz-se necessário para enriquecer qualquer análise olhar também para uma métrica que represente melhor a energia total, ou seja, o conteúdo total do sinal. Uma ótima métrica para isso é o valor *RMS*.
- O *RMS* (Root Mean Square), representa o valor eficaz do sinal, sendo calculado com base em toda a amostra, através da seguinte equação:

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N a_i^2}$$



RMS (Root Mean Square)

Aula 16

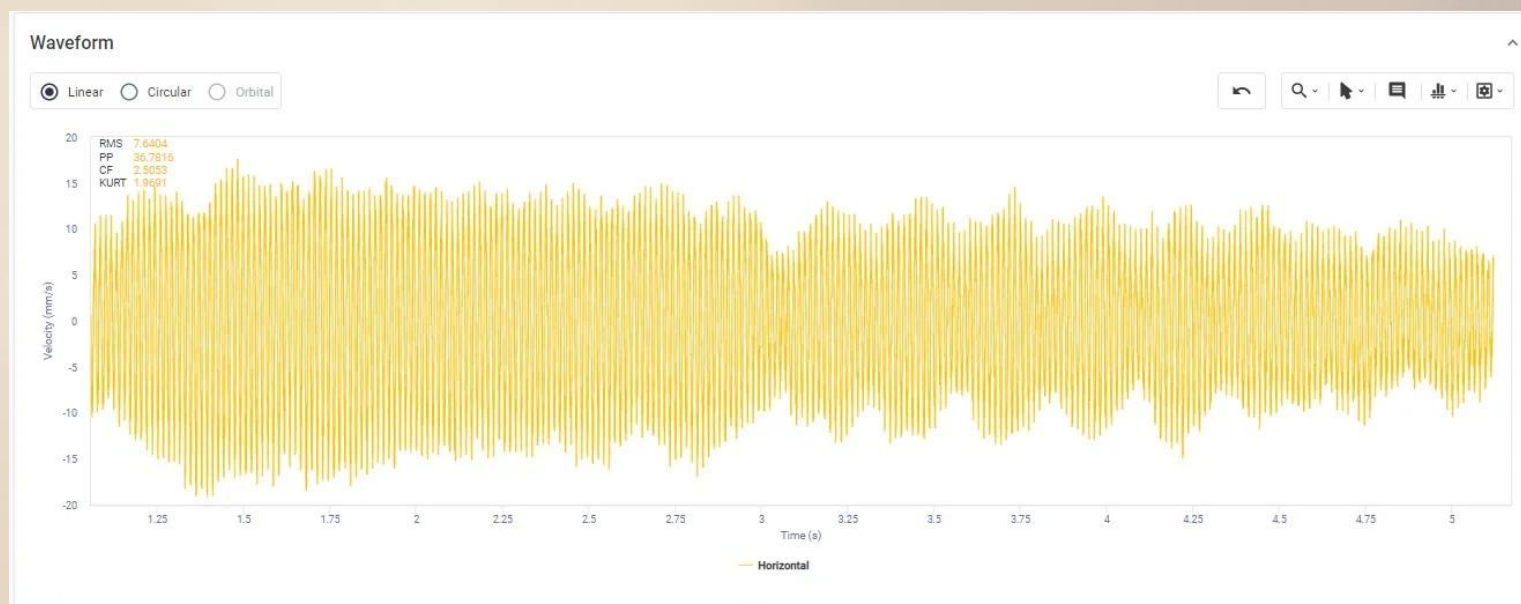
- De forma mais prática, o *RMS* é uma medida da energia vibratória do equipamento.
- Diferentemente dos valores de Pico e de Pico a Pico, o valor *RMS* não se trata de algo pontual, mas sim de uma representação da energia total do sinal.
- Conforme ocorre a progressão de uma falha em um ativo monitorado, o valor *RMS* tende a evoluir, isso acontece, pois o número de picos aumenta, impactando assim na energia total do sinal.
- De forma geral, o valor *RMS* apresenta baixas alterações em estágios iniciais de falhas mecânicas, pois há pouca alteração na energia total do sinal.
- Porém, conforme o agravamento das falhas, o valor *RMS* tende a aumentar de forma mais significativa.



RMS (Root Mean Square)

Aula 16

- Considera um exemplo de um redutor de um moinho. Este redutor apresenta um defeito de erro de transmissão de força e movimento do engrenamento externo, coroa e pinhão.
- Repare no canto superior esquerdo que tanto os valores de Pico a Pico (PP) como o valor RMS são mostrados pelo software. A diferença entre eles é significativa justamente pelo fato de o RMS levar em conta todo o sinal.





Métricas de Curtose e Skewness

Aula 16

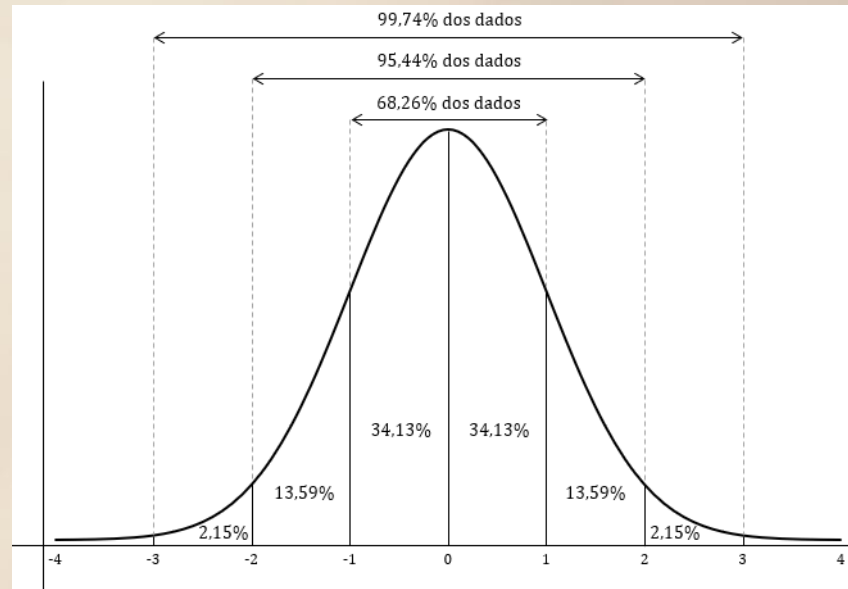
- As métricas de Curtose e Skewness são exemplos de parâmetros estatísticos importantes de serem analisados, pois são capazes de descrever qualitativamente a forma de um sinal de vibração.
- Como um sinal digital é formado por pontos discretos no tempo, podemos tratar qualquer sinal de vibração como uma distribuição estatística de pontos de aceleração, velocidade ou deslocamento.
- As métricas de curtose e skewness (também traduzido como distorção ou assimetria) são dois parâmetros estatísticos importantes.
- Esses parâmetros descrevem qualitativamente a forma de um sinal de vibração.
- No contexto da análise de vibrações, esses parâmetros quantificam os picos ou achatamentos de um sinal, assim como o grau de assimetria em torno de seu valor médio.



Curva de Gauss

Aula 16

- As métricas de Curtose e Skewness são obtidas através de distribuição normal, ou gaussiana. Essa é uma das distribuições de probabilidade mais utilizadas para modelar fenômenos naturais.
- Analizando a figura a seguir, na faixa mais ampla dessa distribuição, correspondente a 3 sigmas, representa-se cerca de 99,74% dos valores de um sinal. Essa região é conhecida como faixa natural de variação do processo.

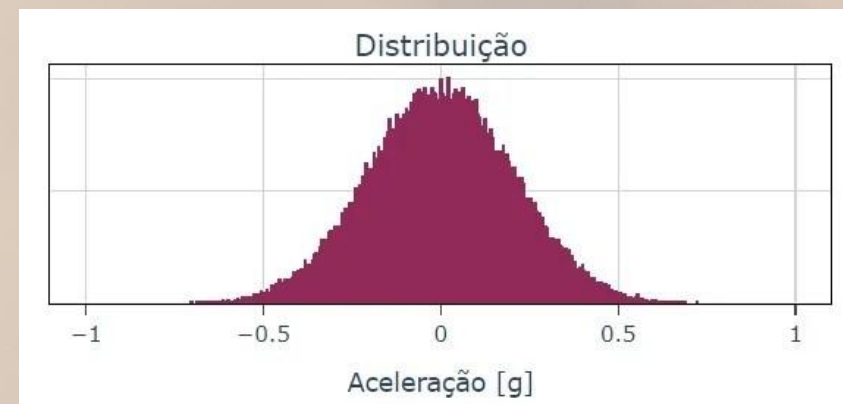




Curva de Gauss

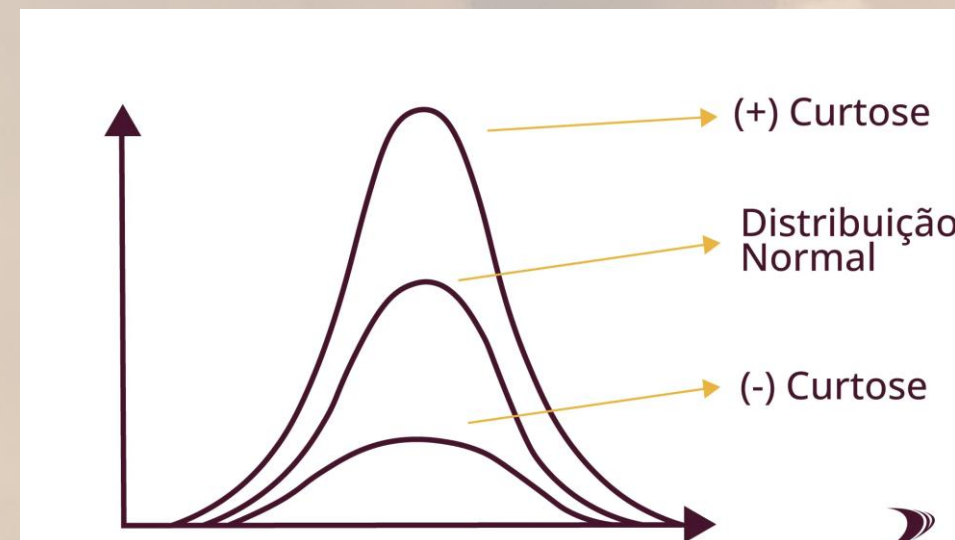
Aula 16

- Na estatística entende-se que um processo sempre possui um certo grau de variabilidade, ou seja, opera dentro de um range de valores, com determinada variação. Caso o processo seja estável, isso significa que a variação vai acontecer dentro dessa faixa de valores.
- Aplicando esse conceito na vibração de máquinas, se possuímos um sinal aleatório em aceleração, teremos uma distribuição normal similar a seguinte:





- Interpreta-se graficamente a curtose em um sinal de vibração olhando para a distribuição dos valores do sinal, como mostra a figura.
- Uma distribuição com uma curtose mais alta terá uma forma mais afunilada, com uma concentração de valores em torno de sua média.
- Por outro lado, uma distribuição com uma curtose mais baixa terá uma forma plana, com valores espalhados por um intervalo maior.
- De maneira resumida, a curtose expressa o quão similares os valores de um sinal são, portanto, a curtose será mais elevada em caso de um sinal com muitos picos ou impactos distintos.

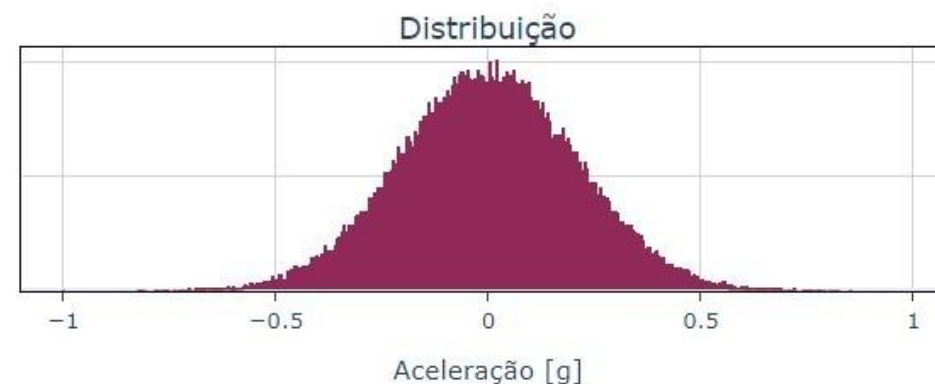
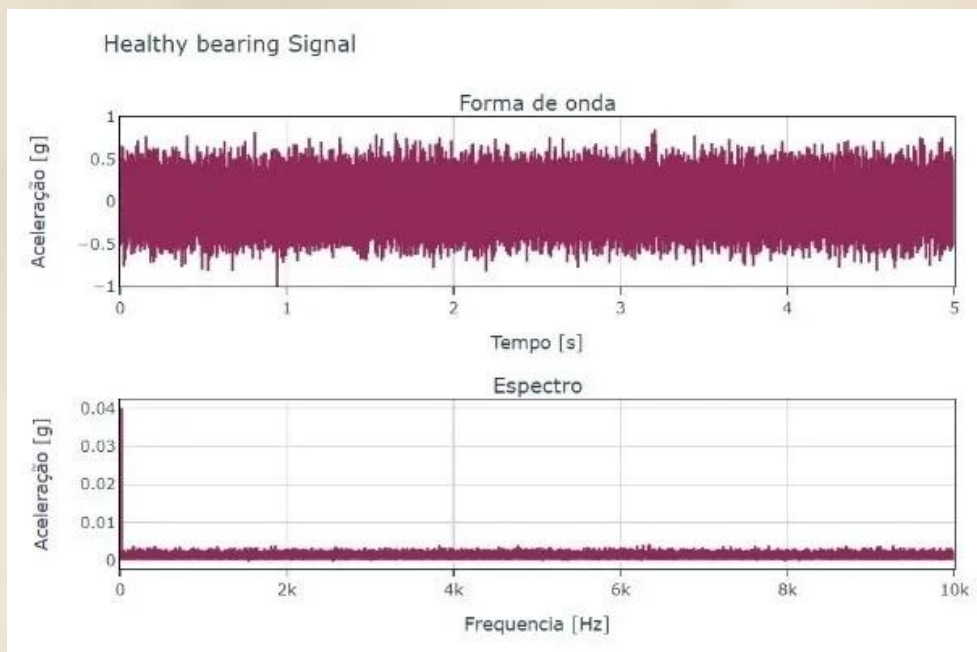




Exemplo da Métrica de Curtose

Aula 16

- Em um rolamento novo, devido à falta de defeitos, espera-se um sinal bastante aleatório, como o mostrado na forma de onda a seguir. Nesse caso, o valor de curtose será próximo a 3.



Estatísticas da forma de onda

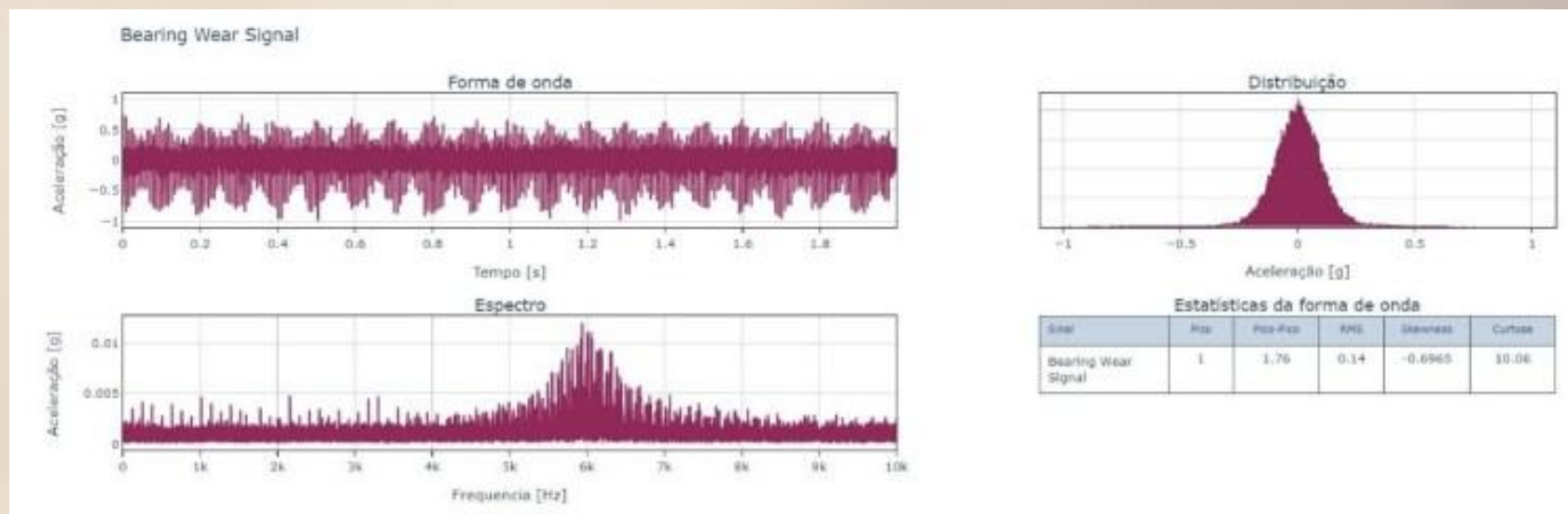
Sinal	Pico	Pico-Pico	RMS	Skewness	Curtose
Healthy bearing Signal	1	1.85	0.21	-0.0031	2.99



Exemplo da Métrica de Curtose

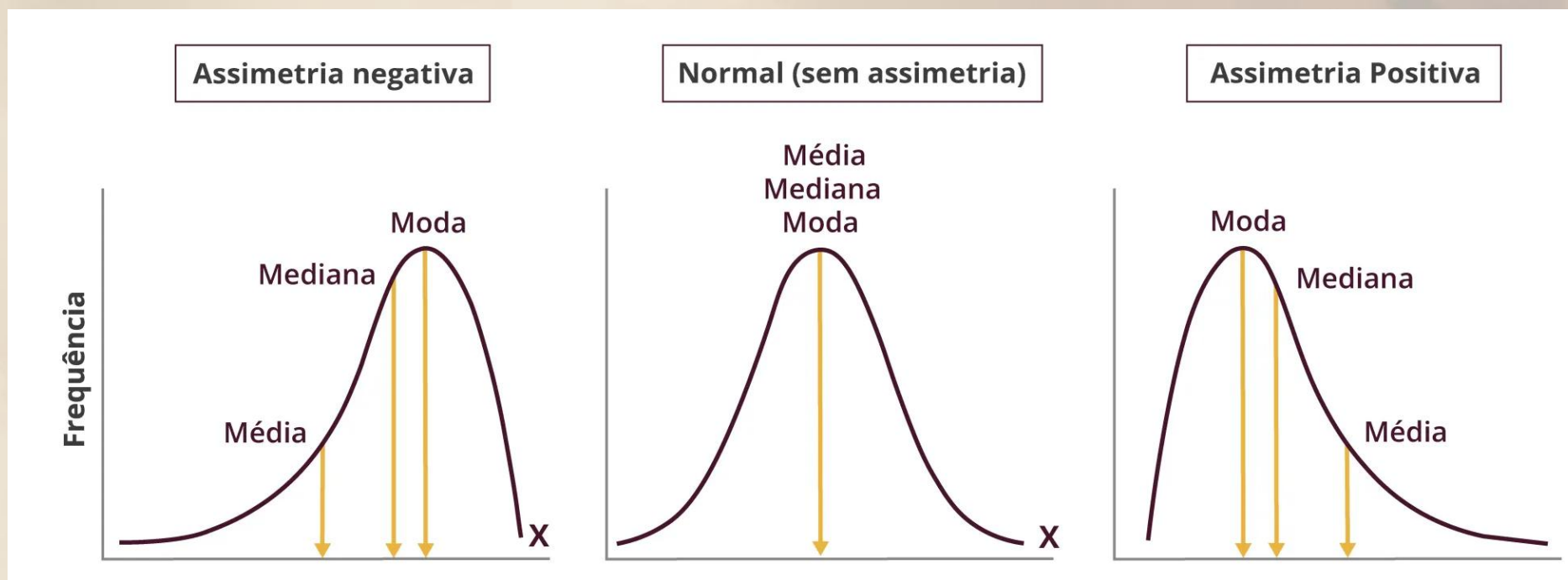
Aula 16

- À medida que os defeitos de um rolamento surgem e evoluem, os sinais de impacto modificam diretamente a distribuição do sinal, isso leva a uma mudança no valor da curtose. Como podemos ver a seguir, o sinal apresenta uma curtose elevada de valor 10.
- Em todos os casos, a partir da forma de onda é possível extrair a curtose em termos de aceleração, velocidade, deslocamento e envelope, tornando a análise ainda mais rica e pertinente.





- ✈ A skewness é outro parâmetro que pode ser utilizado para averiguar a saúde de um ativo.
- ✈ Conforme mencionado, trata-se da distorção ou assimetria de um sinal e cuja interpretação se dá graficamente olhando para a forma da distribuição do sinal.

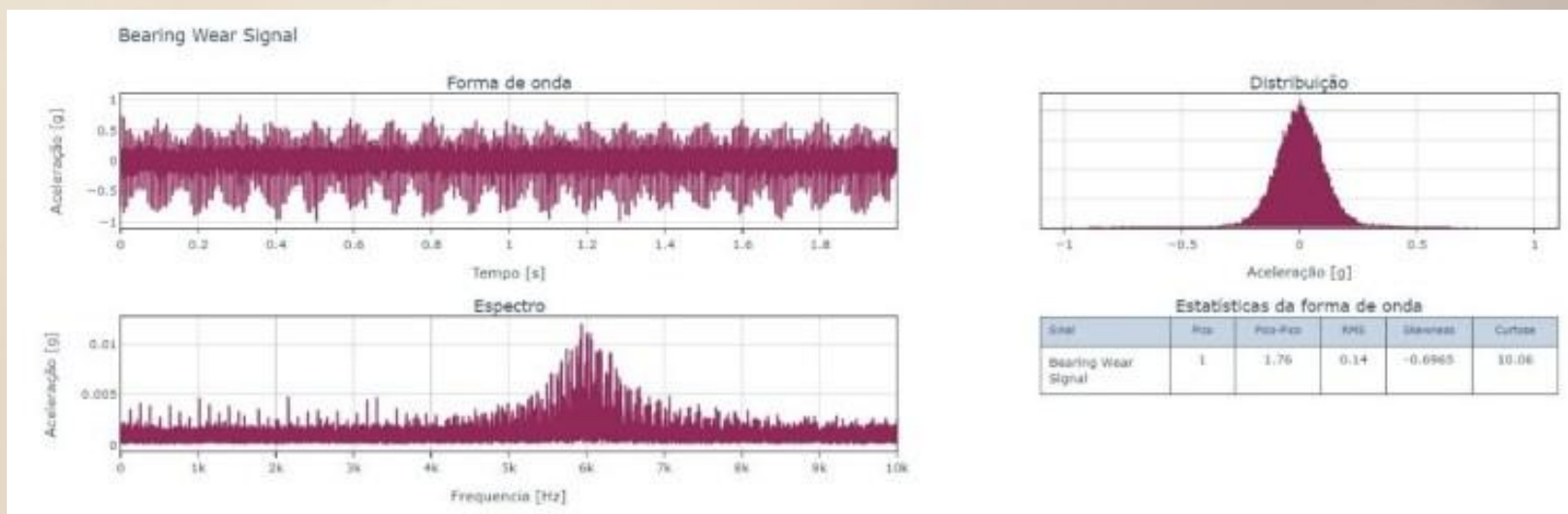




Exemplo da Métrica de Skewness

Aula 16

- Retomando o exemplo do sinal de rolamento defeituoso que analisamos anteriormente, caso o sinal estivesse totalmente simétrico, o valor do skewness seria igual a zero.
- Porém, como podemos observar na forma de onda, o sinal está tendendo para baixo, para a metade negativa do gráfico. Essa característica do sinal faz com que o valor de skewness seja negativo (-0,69) e, como pode-se observar na curva de distribuição, o sinal se apresenta deslocado para a esquerda. O que pode resultar da região de defeito do rolamento ou até mesmo da distribuição de carga no local.





Método de Análise Espectral

Aula 16

- 🌐 A análise espectral consiste em investigar os sinais no domínio da frequência através da Transformada de Fourier aplicada no sinal coletado originalmente no domínio do tempo (forma de onda).
- 🌐 A própria forma de onda (sinal no tempo) contém informações relevantes para análise da condição de um componente. Por isso, é bastante relevante aos analistas.
- 🌐 A forma de onda é representada por uma soma de senos e cossenos de diferentes frequências e amplitudes e, após processamento, dá origem ao espectro deste sinal.
- 🌐 A presença de frequências dominantes no espectro, ou então a concentração de energia em bandas de frequências, podem ser indicativos da presença de falhas.
- 🌐 Cada tipo de falha se manifesta de uma maneira distinta nos gráficos de análise e modifica a assinatura espectral da máquina.



Exemplo de Falhas com Análise Espectral

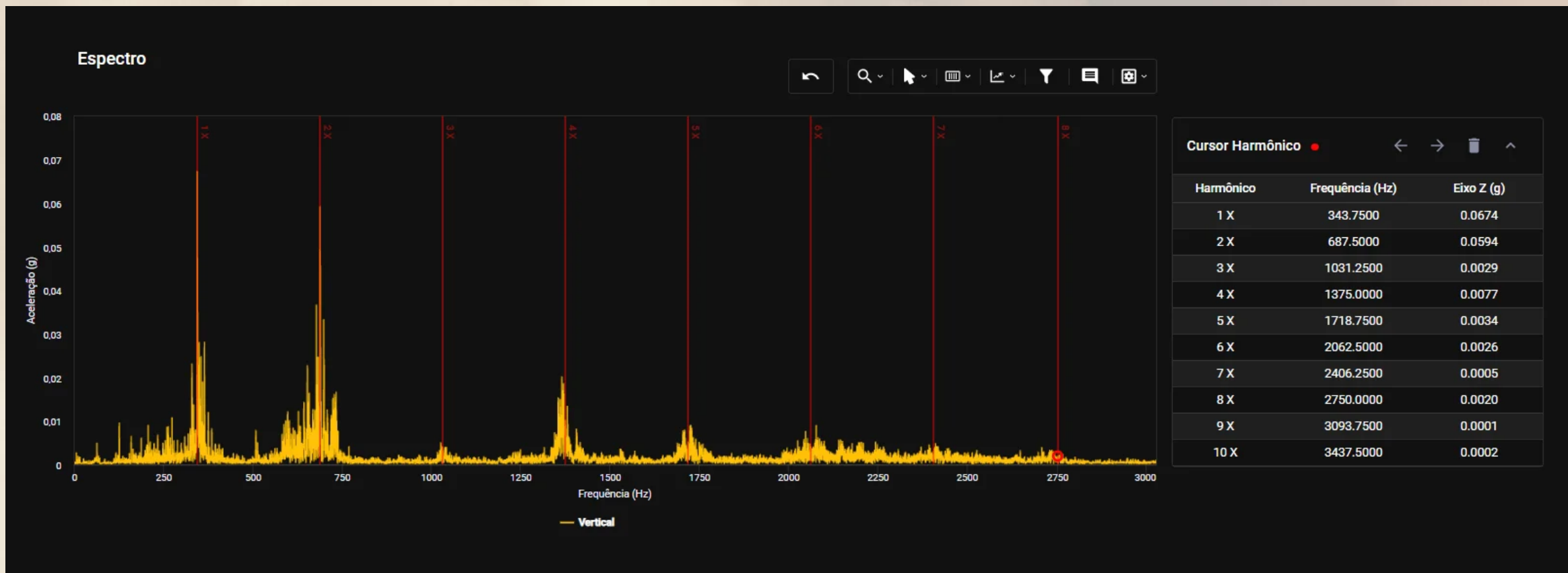
Aula 16

- 🌐 Uma falha bastante comum é a ocorrência de dentes trincados em redutores.
- 🌐 Neste caso, a determinação da severidade da falha se dá com base na presença de harmônicos da frequência de engrenamento.
- 🌐 Além disso, os dentes com trincas geram modulações na frequência de engrenamento referente a rotação da engrenagem com defeito.
- 🌐 Desta forma, outro sintoma será a presença de banda laterais da rotação da engrenagem danificada com muitos harmônicos.
- 🌐 O marcador de Harmônicos permite identificar com precisão a localização destes harmônicos, com frequência fundamental em 343,75 Hz.



Exemplo de Falhas com Análise Espectral

Aula 16





Exemplo de Falhas com Análise Espectral

Aula 16

- Assim, a identificação do engrenamento com defeito pode ser feita com base no espaçamento das bandas laterais em torno da frequência de engrenamento.
- O marcador de Sideband permite identificar que as bandas laterais estão espaçadas em 5,08 Hz, a qual corresponde à velocidade de rotação do eixo de saída, e portanto, corresponde a uma falha no engrenamento de saída.





Coleta de Dados da Análise Espectral

Aula 16

- 🌐 A realização de uma análise espectral bem-sucedida só é possível se a configuração espectral estiver adequada.
- 🌐 Isto impacta não apenas na qualidade do sinal coletado, mas também na capacidade do espectro proporcionar indicadores relevantes para o diagnóstico do ativo.
- 🌐 A seleção da faixa dinâmica deve ser com base nos níveis de amplitude típicos no ativo.
- 🌐 Valores baixos de faixa dinâmica podem resultar em sinais saturados, não capturando a evolução da falha.
- 🌐 Por outro lado, valores altos de faixa dinâmica em ativos que, mesmo na presença de falhas, não atingem tais níveis de vibração, podem resultar em sinais com baixa resolução, ou seja, pouca capacidade de distinguir diferentes níveis de amplitude, prejudicando assim a qualidade do espectro.



- 🌐 A frequência de amostragem determina a máxima frequência identificável no espectro: a frequência de Nyquist.
- 🌐 Assim, para ativos que possuem modos de falha que se manifestam em alta frequência, é desejável a maior frequência de amostragem possível.
- 🌐 Em outros casos, os modos de falha mais críticos podem ocorrer em frequências mais baixas. Dessa forma, o uso de uma frequência de amostragem inferior é a mais adequada.
- 🌐 Isto permite aumentar o tempo de duração da coleta e, conseqüentemente, aumentar a resolução espectral, ou seja, a capacidade de distinguir frequências distintas no espectro.
- 🌐 A combinação entre frequência de amostragem e tempo de duração da coleta determina o número de linhas no espectro.

Obrigado Pela Atenção

Nos Encontramos no Próximo Curso

