



Vibrações Mecânicas

Prof. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues



Aula - 9

Vibração Livre não Amortecida Métodos de Energia



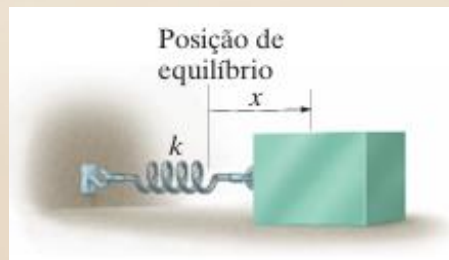
Conteúdos Abordados Nessa Aula

Aula 9

-  Vibração Livre não Amortecida;
-  Sistema Massa-Mola;
-  Sistemas com Um Grau de Liberdade;
-  Métodos de Energia.



- ✈ O movimento harmônico simples de um corpo, se deve somente a forças restauradoras gravitacionais e elásticas que agem no corpo.
- ✈ Como essas forças são conservativas, também é possível usar a equação da conservação da energia para se obter a frequência ou o período natural de vibração.
- ✈ Para mostrar como obter essas quantidades, considere novamente o bloco e a mola mostrados na figura. Quando o bloco em movimento ocupa a posição x medida a partir da posição de equilíbrio, a energia cinética é $T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2$ e a sua energia potencial é $V = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$. Pela conservação da energia, temos:



$$T + V = \text{Constante}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \text{Constante}$$



Equação Padrão do Sistema não Amortecido

Aula 9

- ☉ A equação diferencial que descreve o movimento acelerado do bloco pode ser deduzida derivando-se a equação anterior, em relação ao tempo, portanto:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \text{Constante} \quad \longrightarrow \quad 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x} \cdot \ddot{x} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot k \cdot x \cdot \dot{x} = 0$$

$$m \cdot \dot{x} \cdot \ddot{x} + k \cdot x \cdot \dot{x} = 0 \quad \longrightarrow \quad \dot{x} \cdot (m \cdot \ddot{x} + k \cdot x) = 0$$

- ☉ Como a velocidade em um sistema vibratório não é sempre nula, a solução requer que $(m \cdot \ddot{x} + k \cdot x) = 0$, ou seja, o resultado recai novamente na equação em sua forma padrão:

$$(m \cdot \ddot{x} + k \cdot x) = 0 \quad \longrightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m} \cdot x \quad \longrightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

$$\ddot{x} + \omega_n^2 \cdot x = 0$$

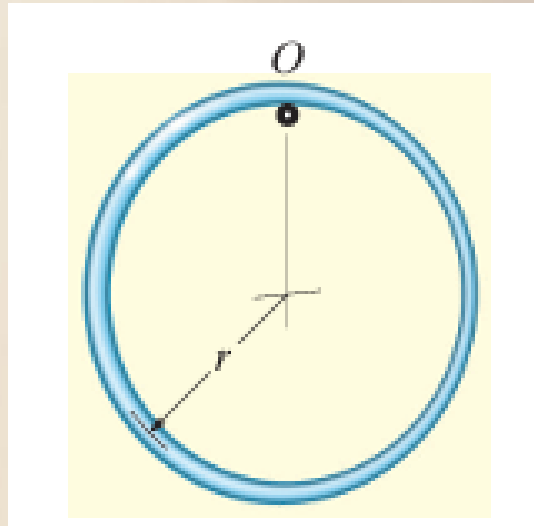
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



Exemplo de Aplicação

Aula 9

- 🌀 O anel delgado mostrado na figura apoia-se em um pino em O . Sabendo-se que a energia total do sistema vibratório é dada por $T + V = m \cdot r^2 \cdot \dot{\theta}^2 - m \cdot g \cdot r \cdot \cos \theta = \text{Constante}$, Determine o período natural de oscilação para pequenas amplitudes. A massa do anel é m .





Solução do Exemplo

Aula 9

 Equação da Energia:

$$T + V = m \cdot r^2 \cdot \dot{\theta}^2 - m \cdot g \cdot r \cdot \cos \theta = \text{Constante}$$

$$m \cdot r^2 \cdot \dot{\theta}^2 - m \cdot g \cdot r \cdot \cos \theta = \text{Constante}$$

 Derivando-se a equação, tem-se que:

$$m \cdot r^2 \cdot 2 \cdot \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} + m \cdot g \cdot r \cdot \sin \theta \cdot \dot{\theta} = 0$$

$$m \cdot r \cdot \dot{\theta} \cdot (2 \cdot r \cdot \ddot{\theta} + g \cdot \sin \theta) = 0$$

 Como a velocidade em um sistema vibratório não é sempre nula, a solução requer que:

$$(2 \cdot r \cdot \ddot{\theta} + g \cdot \sin \theta) = 0$$

 Para pequenos deslocamentos tem-se que $\sin \theta \approx \theta$, portanto, a equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$(2 \cdot r \cdot \ddot{\theta} + g \cdot \theta) = 0$$

$$2 \cdot r \cdot \ddot{\theta} = -g \cdot \theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{2 \cdot r} \cdot \theta$$

 Resultando em:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{2 \cdot r} \cdot \theta = 0$$



Solução do Exemplo

Aula 9

- ✈ Por comparação, verifica-se que a equação obtida possui a forma padrão:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{2 \cdot r} \cdot \theta = 0 \quad \longrightarrow \quad \ddot{\theta} + \omega_n^2 \cdot \theta = 0$$

- ✈ Portanto, a frequência natural de oscilação do sistema é:

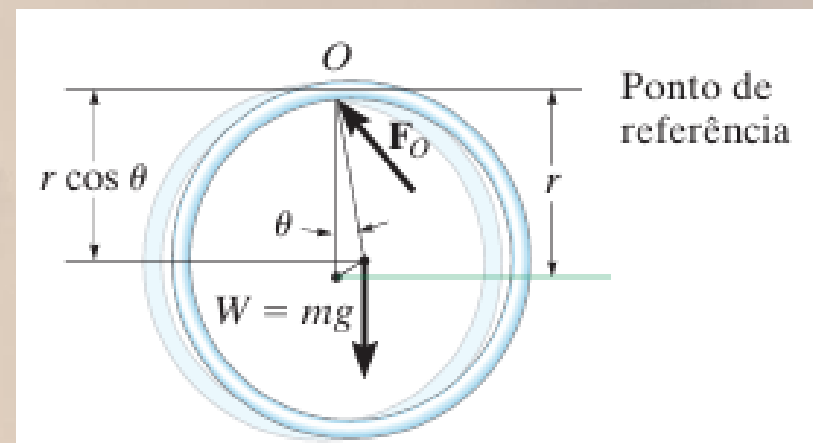
$$\omega_n^2 = \frac{g}{2 \cdot r}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{2 \cdot r}}$$

- ✈ O Período é dado por:

$$\tau = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_n}$$

$$\tau = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot r}{g}}$$

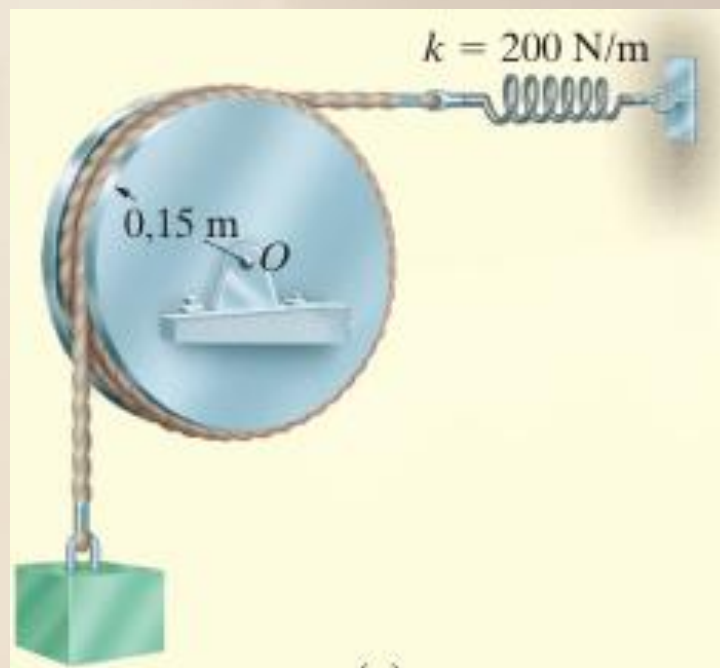




Exemplo de Aplicação

Aula 9

- Um bloco de 10 kg está suspenso por uma corda enrolada na periferia de um disco de 5 kg, como mostra a figura. Se a mola tem rigidez $k = 200 \text{ N/m}$, determine o período natural de vibração para o sistema.



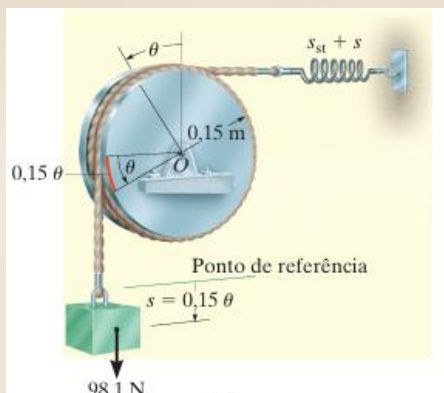


Solução do Exemplo

Aula 9

Equação da Energia:

A figura mostra um diagrama do bloco e disco quando eles estão deslocados de s e θ em relação a suas posições de equilíbrio, respectivamente. Como $s = 0,15 \cdot \theta$, tem-se que $v_b = \dot{s} = 0,15 \cdot \dot{\theta}$, assim, a energia cinética do sistema é:



$$T = \frac{1}{2} \cdot m_b \cdot v_b^2 + \frac{1}{2} \cdot I_O \cdot \omega_d^2$$

$$I_O = \frac{1}{2} \cdot m_d \cdot r^2$$

$$\omega_d = \dot{\theta}$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot m_b \cdot v_b^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot m_d \cdot r^2 \right) \cdot \dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (0,15 \cdot \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 0,15^2 \right) \cdot \dot{\theta}^2$$

$$T = 0,1125 \cdot \dot{\theta}^2 + 0,028125 \cdot \dot{\theta}^2$$

$$T = 0,1406 \cdot \dot{\theta}^2$$

Estabelecendo a referência na posição de equilíbrio do bloco e observando que a mola se alonga s_{st} para obter o equilíbrio, podemos escrever a seguinte expressão para a energia potencial:

$$V = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 - W \cdot s = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (s_{st} + s)^2 - W \cdot s$$



Solução do Exemplo

Aula 9

$$V = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot (s_{st} + (0,15 \cdot \theta))^2 - 98,1 \cdot 0,15 \cdot \theta$$

$$V = 100 \cdot (s_{st} + (0,15 \cdot \theta))^2 - 14,715 \cdot \theta$$

✈ Portanto, a energia total do sistema será:

$$T + V = \text{Constante}$$

$$0,1406 \cdot \dot{\theta}^2 + 100 \cdot (s_{st} + (0,15 \cdot \theta))^2 - 14,715 \cdot \theta = \text{Constante}$$

✈ A derivada da equação resulta em:

$$2 \cdot 0,1406 \cdot \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} + 2 \cdot 100 \cdot (s_{st} + 0,15 \cdot \theta) \cdot 0,15 \cdot \dot{\theta} - 14,715 \cdot \dot{\theta} = 0$$

$$0,2812 \cdot \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} + 200 \cdot (s_{st} + 0,15 \cdot \theta) \cdot 0,15 \cdot \dot{\theta} - 14,715 \cdot \dot{\theta} = 0$$



Solução do Exemplo

Aula 9

Como $s_{st} = W_b/k = 98,1/200 = 0,4905$, a equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$0,2812 \cdot \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} + 200 \cdot (0,4905 + 0,15 \cdot \theta) \cdot 0,15 \cdot \dot{\theta} - 14,715 \cdot \dot{\theta} = 0$$

$$0,2812 \cdot \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} + (98,1 + 30 \cdot \theta) \cdot 0,15 \cdot \dot{\theta} - 14,715 \cdot \dot{\theta} = 0$$

$$0,2812 \cdot \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} + 14,715 \cdot \dot{\theta} + 4,5 \cdot \theta \cdot \dot{\theta} - 14,715 \cdot \dot{\theta} = 0$$

$$0,2812 \cdot \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} + 4,5 \cdot \theta \cdot \dot{\theta} = 0$$

$$\dot{\theta} \cdot (0,2812 \cdot \ddot{\theta} + 4,5 \cdot \theta) = 0$$

Como a velocidade angular do disco, $\dot{\theta}$, não é sempre zero, a solução requer que:

$$(0,2812 \cdot \ddot{\theta} + 4,5 \cdot \theta) = 0$$



Solução do Exemplo

Aula 9

$$0,2812 \cdot \ddot{\theta} = -4,5 \cdot \theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{4,5}{0,2812} \cdot \theta$$

$$\ddot{\theta} = -16 \cdot \theta$$

$$\ddot{\theta} + 16 \cdot \theta = 0$$

🌐 Por comparação, verifica-se que a equação obtida possui a forma padrão:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 \cdot x = 0$$

🌐 Portanto, a frequência natural de oscilação do sistema é:

$$\omega_n^2 = 16$$

$$\omega_n = \sqrt{16}$$

$$\omega_n = 4 \text{ rad/s}$$

🌐 O Período é dado por:

$$\tau = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_n}$$

$$\tau = \frac{2 \cdot \pi}{4}$$

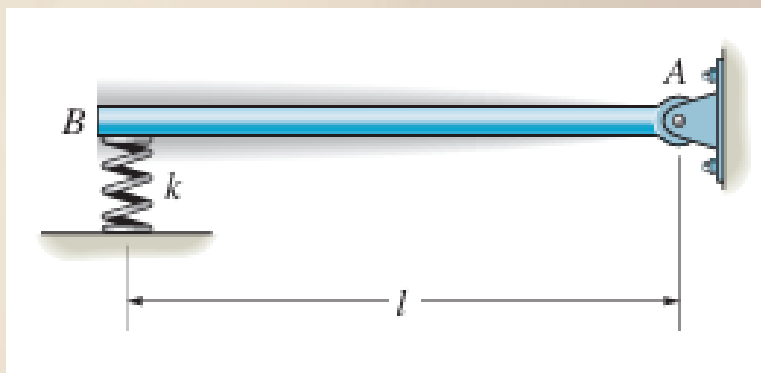
$$\tau = 1,57 \text{ s}$$



Exercícios Propostos

Aula 9

1. A barra uniforme de massa m é suportada por um pino em A e uma mola em B . Se a extremidade B sofre um pequeno deslocamento para baixo e é solta, determine o período natural de vibração.

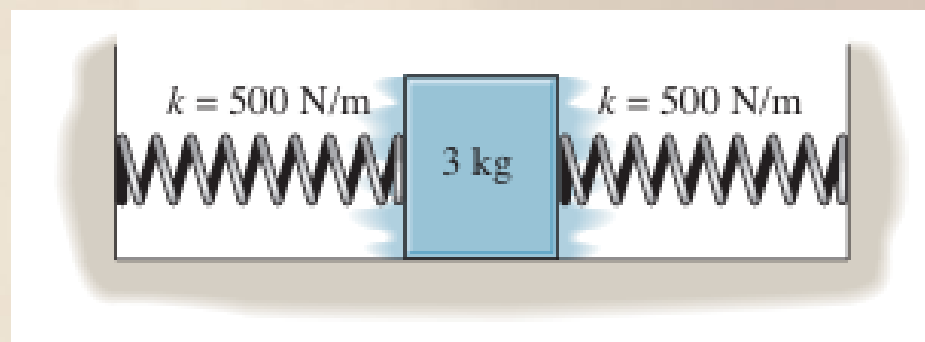




Exercícios Propostos

Aula 9

2. Determine a equação diferencial de movimento do bloco de 3 kg que é ligeiramente deslocado e solto a seguir. A superfície é lisa e as molas estão inicialmente não deformadas.

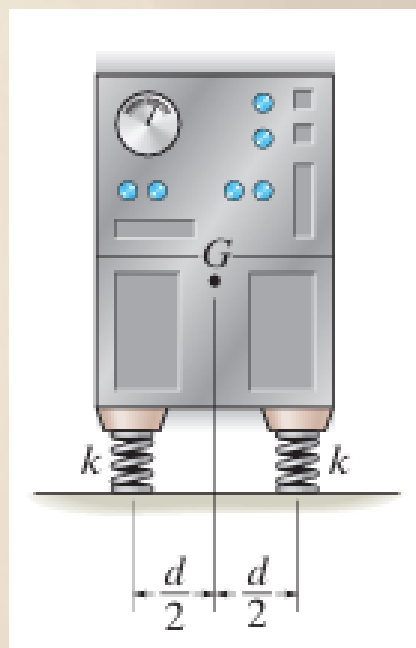




Exercícios Propostos

Aula 9

3. A máquina tem massa m e está suportada uniformemente por quatro molas, cada uma com rigidez k . Determine o período natural de vibração vertical.

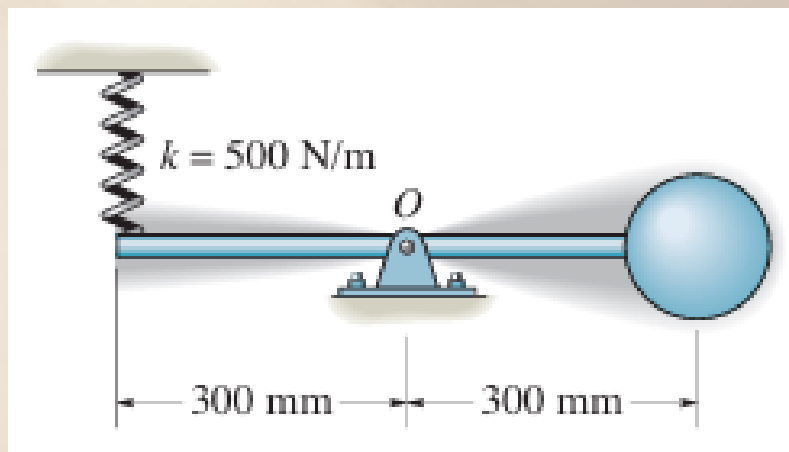




Exercícios Propostos

Aula 9

4. Determine o período natural de vibração da esfera de 3 kg. Despreze a massa da barra e o tamanho da esfera.

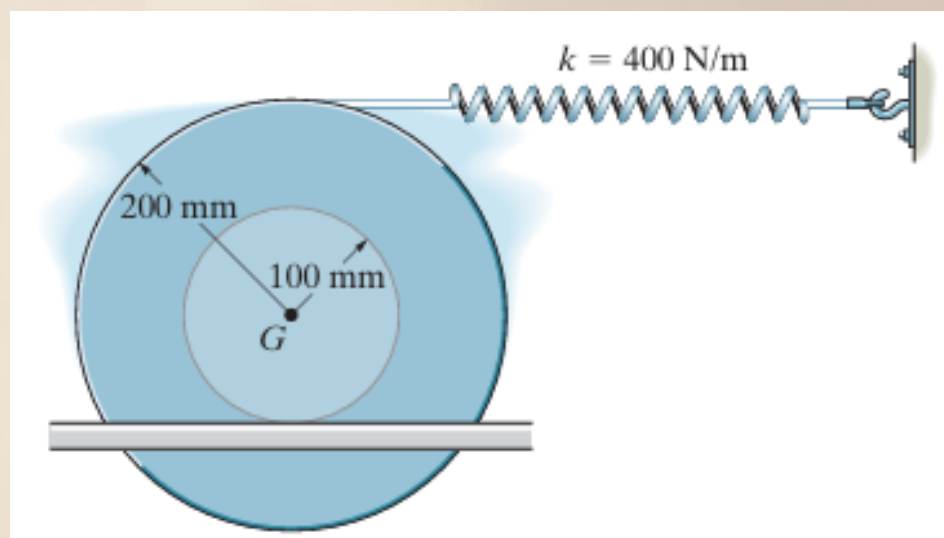




Exercícios Propostos

Aula 9

5. Determine a equação diferencial de movimento da bobina de 3 kg. Suponha que, durante as oscilações, ela não escorregue na superfície de contato. O raio de giração da bobina em relação ao seu centro de massa é $K_c = 125$ mm.



Obrigado Pela Atenção

Nos Encontramos na Próxima Aula

