EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

Vibrações Mecânicas

Prof. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues

EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

Aula - 7

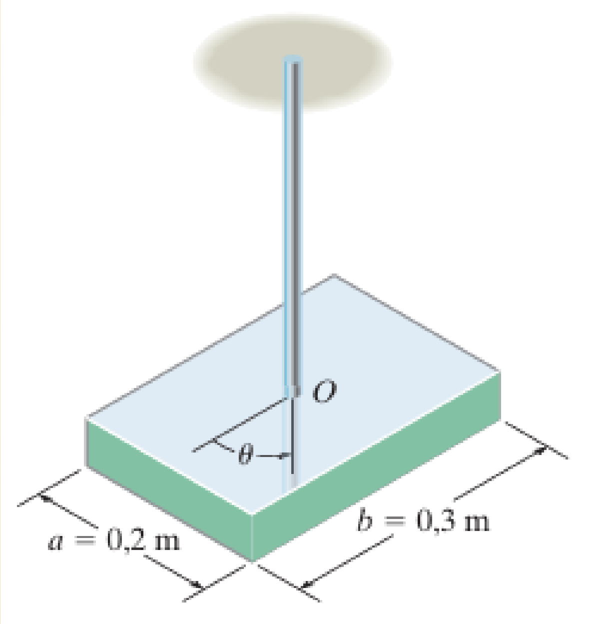
Vibração Livre não Amortecida em Sistemas com Um Grau de Liberdade

Conteúdos Abordados Nessa Aula

- Vibração Livre não Amortecida;
- Sistema Massa-Mola
- Sistemas com Um Grau de Liberdade;
- Solução de Exercícios.

Exemplo de Aplicação

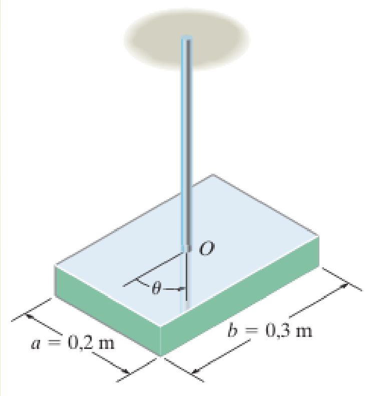
- A placa retangular de 10 kg mostrada na figura está suspensa em seu centro por uma barra de rigidez torcional k = 1,5 Nm/rad. Determine o período natural de vibração da placa quando aplica-se um pequeno deslocamento angular θ em seu próprio plano.

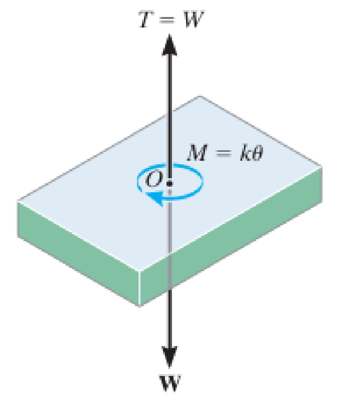


Solução do Exemplo

Diagrama de Corpo Livre:

- Como a placa é deslocada em seu próprio plano, o momento torcional restaurador criado pela barra tem intensidade $M = k \cdot \theta$. Esse momento age no sentido oposto ao do deslocamento angular θ. O sentido convencionado para a aceleração angular $\ddot{\theta}$ é o de θ positivo.





Equação de Movimento:

$$\sum M_O = I_O \cdot \alpha \quad \Rightarrow \quad -k \cdot \theta = I_O \cdot \ddot{\theta}$$

$$-\frac{k}{I_O} \cdot \theta = \ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{k}{I_O} \cdot \theta = 0$$

- Como essa equação está na forma-padrão, pode-se escrever que:

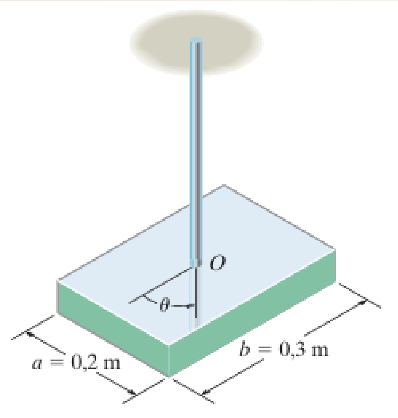
$$\ddot{\theta} + \omega_n^2 \cdot \theta = 0$$

- Portanto:

$$\omega_n^2 = \frac{k}{I_O} \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{I_O}}$$

Solução do Exemplo

- O momento de inércia da placa em relação ao eixo coincidente com a barra é dado por:



$$I_O = \frac{1}{12} \cdot m \cdot (a^2 + b^2)$$

$$I_O = \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot (0{,}2^2 + 0{,}3^2)$$

$$I_O = 0{,}108 \text{ kg m}^2$$

- O Período é dado por:

$$\tau = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_n} \rightarrow \tau = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{\frac{k}{I_O}}}$$

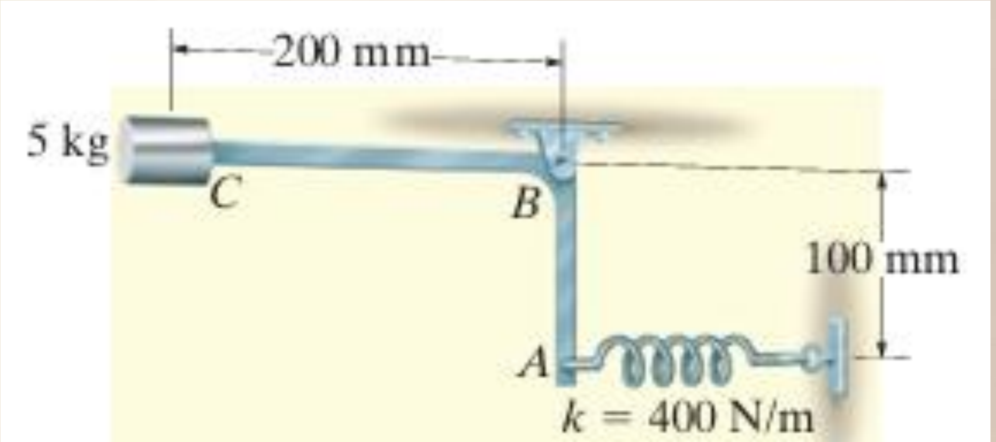
$$\tau = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I_O}{k}}$$

$$\tau = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{0{,}108}{1{,}5}}$$

$$\tau = 1{,}69 \text{ s}$$

Exemplo de Aplicação

- A barra curva mostrada na figura tem massa desprezível e suporta um cursor de 5 kg em sua extremidade. Determine o período natural de vibração para o sistema.



Solução do Exemplo

Diagramas de Corpo Livre e Dinâmico:

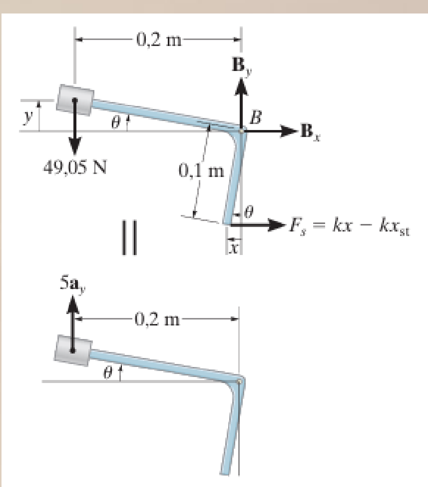
- Desloca-se a barra em um pequeno ângulo θ em relação à sua posição de equilíbrio. Como a mola apresenta uma compressão inicial x_{st} para satisfazer a condição de equilíbrio, quando o deslocamento $x > x_{st}$ a mola exerce na barra uma força:

$$F_S = k \cdot x - k \cdot x_{st}$$

- Para obter a forma-padrão, $5 \cdot a_y$ deve atuar para cima, estando de acordo com o deslocamento positivo θ.

Equação de Movimento:

- Os momentos serão somados em relação ao ponto B a fim de se eliminar a reação desconhecida nesse ponto. Considerando que θ é pequeno, pode-se escrever que:



$$\sum M_B = \sum (\mu_k)_B$$

$$k \cdot x \cdot 0{,}1 - k \cdot x_{st} \cdot 0{,}1 + 49{,}05 \cdot 0{,}2 = -5 \cdot a_y \cdot 0{,}2$$

Solução do Exemplo

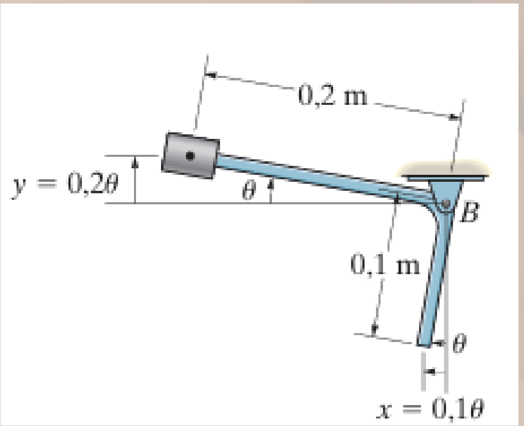
- O segundo termo no primeiro membro dessa equação, $-k \cdot x_{st} \cdot 0{,}1$, representa o momento criado pela força da mola necessária para manter o cursor em equilíbrio, isto é, em $x = 0$. Esse momento tem a mesma intensidade do momento $49{,}05 \cdot 0{,}2$ criado pelo peso do cursor, de forma que esses dois momentos se cancelam por terem sentidos opostos. Assim, a equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$k \cdot x \cdot 0{,}1 - k \cdot x_{st} \cdot 0{,}1 + 49{,}05 \cdot 0{,}2 = -5 \cdot a_y \cdot 0{,}2$$

$$k \cdot x \cdot 0{,}1 = -5 \cdot a_y \cdot 0{,}2$$

- Cinemática:

- As posições da mola e do cursor podem ser relacionadas com o ângulo θ. Uma vez que θ é pequeno, $x = 0{,}1 \cdot \theta$ e $y = 0{,}2 \cdot \theta$. Portanto, $a_y = \ddot{y} = 0{,}2 \cdot \ddot{\theta}$. Substituindo esses resultados na equação anterior, temos:



$$400 \cdot (0{,}1 \cdot \theta) \cdot 0{,}1 = -5 \cdot \left(0{,}2 \cdot \ddot{\theta}\right) \cdot 0{,}2$$

Solução do Exemplo

- A equação obtida pode ser reescrita na forma padrão da seguinte maneira:

$$400 \cdot (0{,}1 \cdot \theta) \cdot 0{,}1 = -5 \cdot \left(0{,}2 \cdot \ddot{\theta}\right) \cdot 0{,}2$$

$$4 \cdot \theta = -0{,}2 \cdot \ddot{\theta}$$

$$-\frac{4}{0{,}2} \cdot \theta = \ddot{\theta}$$

$$-20 \cdot \theta = \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + 20 \cdot \theta = 0$$

- Por comparação, verifica-se que a equação obtida possui a forma padrão:

$$\ddot{x} - \omega_n^2 \cdot x = 0$$

- Portanto, a frequência natural de oscilação do sistema é:

$$\omega_n^2 = 20 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{20} \Rightarrow \omega_n = 4{,}47 \text{ rad/s}$$

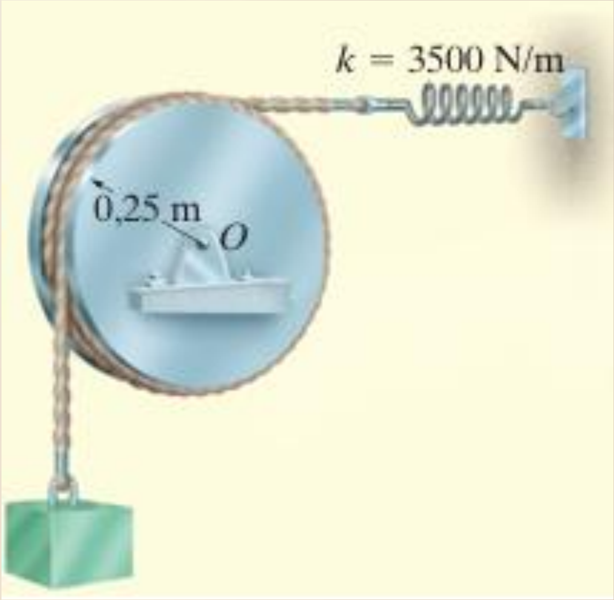
- O Período é dado por:

$$\tau = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_n} \Rightarrow \tau = \frac{2 \cdot \pi}{4{,}47}$$

$$\tau = 1{,}40 \text{ s}$$

Exemplo de Aplicação

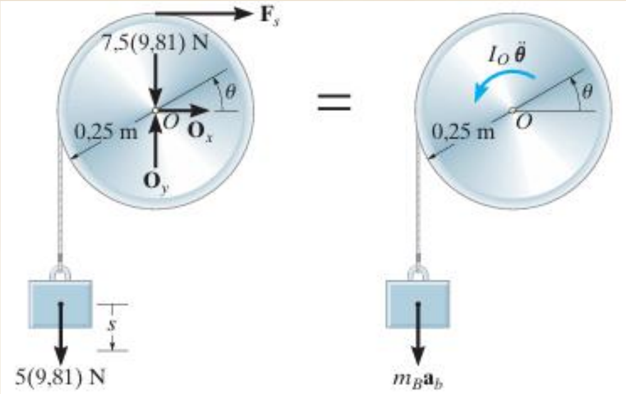
- Um bloco de 5 kg está suspenso por uma corda que passa sobre um disco de 7,5 kg, como mostra a figura. A mola tem rigidez k = 3500 N/m. Determine o período natural de vibração para o sistema.



Solução do Exemplo

Diagramas de Corpo Livre e Dinâmico:

- O sistema consiste no disco, que sofre uma rotação definida pelo ângulo θ, e o bloco, que se translada de s.
O vetor $I_O \cdot \ddot{\theta}$ tem o sentido correspondente a θ positivo e, consequentemente, $m_B \cdot a_b$ tem o sentido (para baixo) correspondente a s positivo.



Equação de Movimento:

- Somando os momentos em relação ao ponto O para eliminar as reações O_x e O_y, e considerando para o disco que $I_O = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$, pode-se escrever que:

$$\sum M_O = \sum (\mu_k)_O$$

$$5 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}25 - F_s \cdot 0{,}25 = I_O \cdot \ddot{\theta} + 5 \cdot a_b \cdot 0{,}25$$

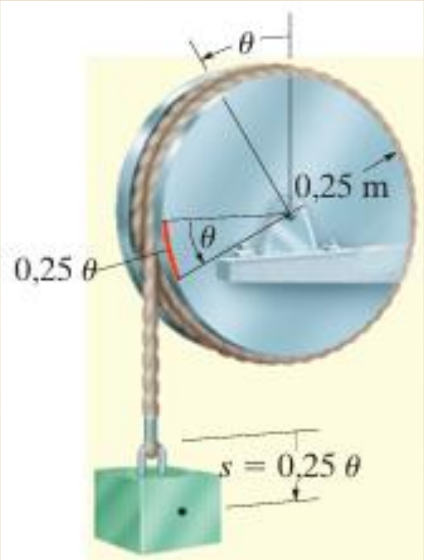
$$5 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}25 - F_s \cdot 0{,}25 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot \ddot{\theta} + 5 \cdot a_b \cdot 0{,}25$$

$$5 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}25 - F_s \cdot 0{,}25 = \frac{1}{2} \cdot 7{,}5 \cdot 0{,}25^2 \cdot \ddot{\theta} + 5 \cdot a_b \cdot 0{,}25$$

Solução do Exemplo

- Cinemática:

- Como mostra o diagrama cinemático na figura, um pequeno deslocamento positivo θ do disco corresponde um deslocamento do bloco para baixo $s = 0{,}25 \cdot \theta$; logo, $a_b = \ddot{s} = 0{,}25 \cdot \ddot{\theta}$.



- Quando $\theta = 0°$, a força da mola necessária ao equilíbrio do disco tem uma intensidade de $5 \cdot 9{,}81 = 49{,}05$ N e age para a direita. Para a posição θ, a força da mola é $F_s = 3500 \cdot 0{,}25 \cdot \theta + 5 \cdot 9{,}81$N. Substituindo esses resultados na equação anterior, obtemos:

$$5 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}25 - F_s \cdot 0{,}25 = \frac{1}{2} \cdot 7{,}5 \cdot 0{,}25^2 \cdot \ddot{\theta} + 5 \cdot a_b \cdot 0{,}25$$

$$12{,}26 - F_s \cdot 0{,}25 = 0{,}2344 \cdot \ddot{\theta} + 1{,}25 \cdot a_b$$

$$12{,}26 - (875 \cdot \theta + 49{,}05) \cdot 0{,}25 = 0{,}2344 \cdot \ddot{\theta} + 1{,}25 \cdot a_b$$

$$12{,}26 - 218{,}75 \cdot \theta - 12{,}26 = 0{,}2344 \cdot \ddot{\theta} + 1{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot \ddot{\theta}$$

$$-218{,}75 \cdot \theta = 0{,}2344 \cdot \ddot{\theta} + 0{,}3125 \cdot \ddot{\theta}$$

Solução do Exemplo

- A equação obtida pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$-218{,}75 \cdot \theta = 0{,}5469 \cdot \ddot{\theta}$$

$$-\frac{218{,}75}{0{,}5469} \cdot \theta = \ddot{\theta}$$

$$-400 \cdot \theta = \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + 400 \cdot \theta = 0$$

- Por comparação, verifica-se que a equação obtida possui a forma padrão:

$$\ddot{x} - \omega_n^2 \cdot x = 0$$

- Portanto, a frequência natural de oscilação do sistema é:

$$\omega_n^2 = 400 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{400} \Rightarrow \omega_n = 20 \text{ rad/s}$$

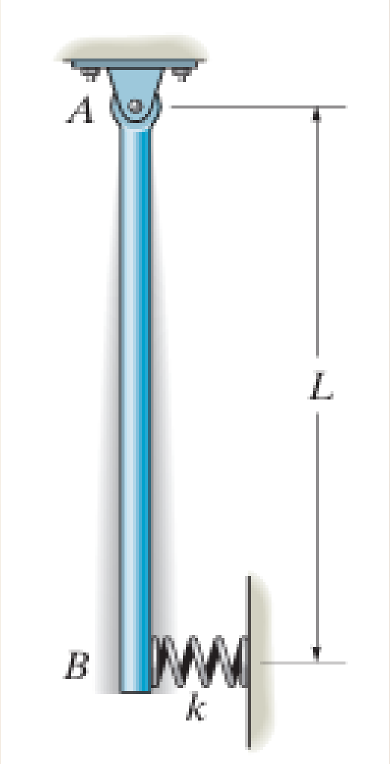
- O Período é dado por:

$$\tau = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_n} \Rightarrow \tau = \frac{2 \cdot \pi}{20}$$

$$\tau = 0{,}314 \text{ s}$$

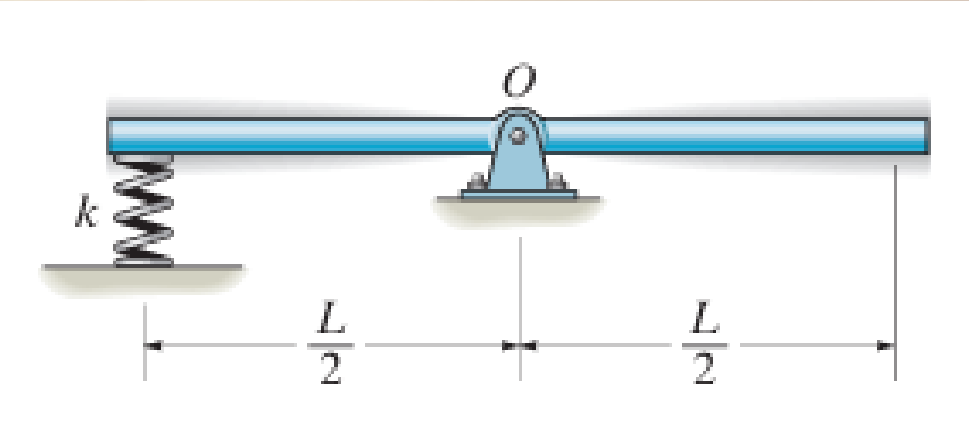
Exercícios Propostos

1. A barra uniforme de massa m é apoiada por um pino em A e uma mola em B. Se B recebe um pequeno deslocamento de lado e é solto, determine o período natural de vibração.



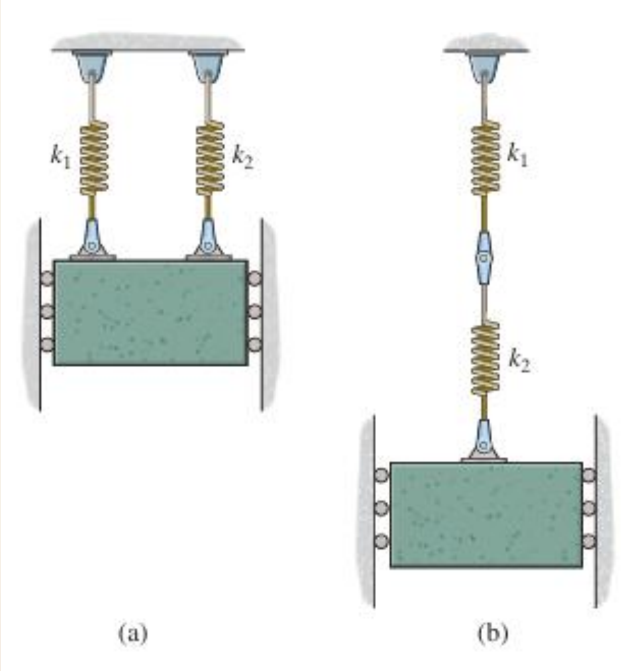
Exercícios Propostos

2. Determine o período natural de vibração da barra uniforme de massa *m* quando ela é deslocada ligeiramente para baixo e solta.

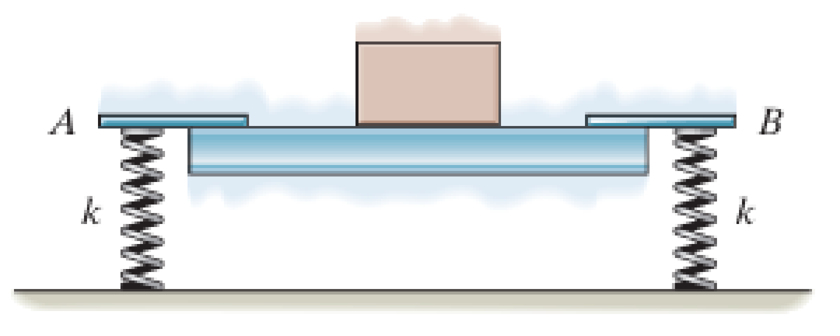


Exercícios Propostos

3. O bloco de 15 kg é suspenso por duas molas com diferentes rigidezes e arrumadas (a) em paralelo uma à outra e (b) em série. Se os períodos naturais de oscilação do sistema paralelo e do sistema em série forem observados como sendo 0,5 s e 1,5 s, respectivamente, determine as rigidezes k_1 e k_2 das molas.

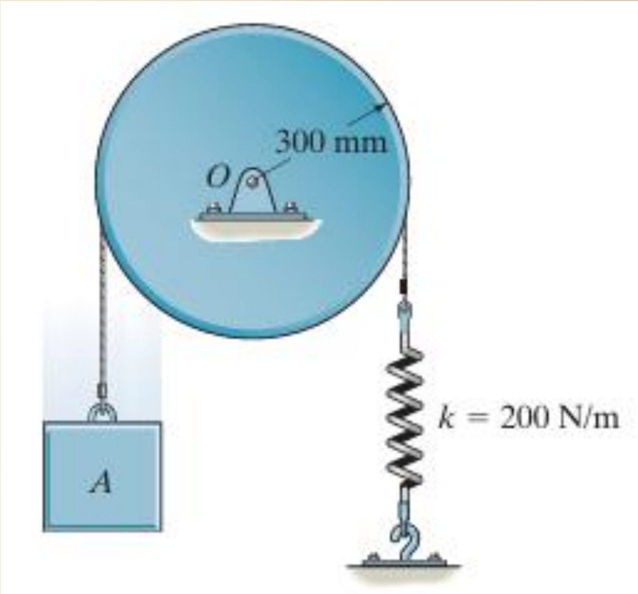


4. Uma barra uniforme é suportada em suas duas extremidades pelas molas *A* e *B*, cada uma com uma rigidez *k*. O período de vibração vertical da barra quando nada se apoia nela é de 0,83 s. Seu período se altera para 1,52 s, quando se coloca sobre seu centro uma massa de 50 kg. Calcule a rigidez de cada mola e a massa da barra.



Exercícios Propostos

5. O disco de 20 kg é preso por um pino em seu centro de massa *O* e apoia o bloco *A* de 4 kg. Se a correia que passa em volta do disco não desliza em sua superfície de contato, determine o período natural de vibração do sistema.



Obrigado Pela Atenção

Nos Encontramos na Próxima Aula

EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA