



Vibrações Mecânicas

Prof. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues



Aula - 13

Vibração Forçada com Amortecimento Viscoso



Conteúdos Abordados Nessa Aula

Aula 13

-  Vibração Forçada com Amortecimento Viscoso;
-  Sistema Massa-Mola-Amortecedor;
-  Sistemas com Um Grau de Liberdade.



Definição de Vibração Forçada Amortecida

Aula 13

- 🌐 A vibração forçada com amortecimento ocorre quando um sistema mecânico é submetido a uma força externa periódica e, ao mesmo tempo, possui mecanismos de dissipação de energia, geralmente representados por elementos de amortecimento viscoso ou de outra natureza.
- 🌐 Nessa condição, o movimento resultante não depende apenas das propriedades naturais do sistema, como massa, rigidez e amortecimento, mas também das características da excitação externa, como frequência, intensidade e forma de aplicação.
- 🌐 Diferentemente da vibração livre, em que o movimento tende a decair ao longo do tempo devido ao amortecimento, na vibração forçada a presença de uma fonte contínua de energia mantém o sistema em movimento permanente, estabelecendo uma resposta que pode atingir um regime estacionário após a passagem dos efeitos transitórios iniciais.



Definição de Vibração Forçada Amortecida

Aula 13

- 🌐 A presença do amortecimento desempenha um papel fundamental nesse fenômeno, pois atua limitando a amplitude das vibrações, especialmente quando a frequência da força externa se aproxima da frequência natural do sistema, situação em que ocorre a ressonância. Em um sistema não amortecido, a amplitude tenderia ao infinito em ressonância, o que, na prática, seria catastrófico. Já com o amortecimento, mesmo que reduzido, as amplitudes máximas permanecem controladas, garantindo maior estabilidade ao sistema.
- 🌐 O nível de amortecimento também influencia a largura da região de ressonância, de modo que sistemas com maior amortecimento apresentam uma resposta menos sensível a pequenas variações na frequência da força excitadora.
- 🌐 Do ponto de vista da análise de vibrações mecânicas, a vibração forçada com amortecimento é essencial para a compreensão do comportamento real de máquinas e estruturas em operação, pois dificilmente se encontram sistemas ideais sem dissipação de energia.



Definição de Vibração Forçada Amortecida

Aula 13

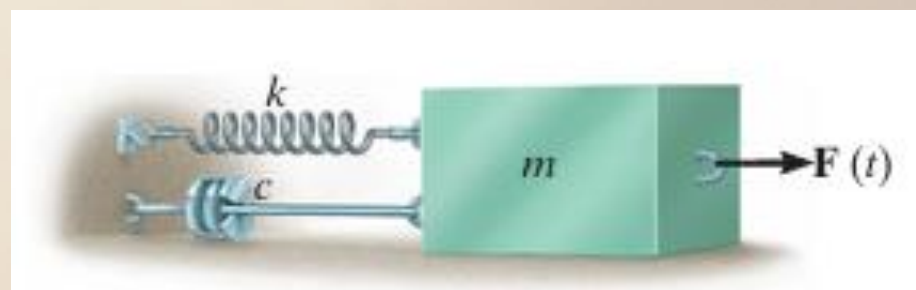
- ✈ Esse tipo de análise permite prever como equipamentos responderão a excitações externas, como as forças periódicas geradas por desequilíbrios em rotores, irregularidades em engrenagens, cargas de tráfego em pontes ou até mesmo excitações ambientais em edifícios e aeronaves.
- ✈ Além disso, fornece subsídios para o dimensionamento de isoladores e absorvedores dinâmicos, bem como para a escolha adequada de materiais e componentes que aumentem a segurança e a durabilidade do sistema.
- ✈ Assim, a vibração forçada com amortecimento se apresenta como uma das situações mais representativas da realidade prática na engenharia, permitindo ao analista prever o comportamento vibratório diante de excitações externas contínuas e propor soluções de controle que evitem a ocorrência de falhas, reduzam níveis de ruído e assegurem o funcionamento eficiente de máquinas e estruturas.



Definição de Vibração Forçada Amortecida

Aula 13

- ❶ O caso mais geral de movimento vibratório com um grau de liberdade ocorre quando o sistema inclui os efeitos do movimento forçado e do amortecimento induzido.
- ❷ A análise desse tipo de vibração é de grande valor prático quando aplicada a sistemas que apresentam características significativas de amortecimento.





Equação do Movimento

Aula 13

- ✈ O bloco e mola mostrados na figura são um modelo conveniente para representar as características vibratórias de um sistema amortecido submetido a uma força periódica $F = F_0 \cdot \text{sen}(\omega_0 \cdot t)$. Essa força tem amplitude F_0 e frequência angular ω . A aplicação da equação de movimento resulta em:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = F_0 \cdot \text{sen}(\omega_0 \cdot t)$$

- ✈ Como a equação é não homogênea, sua solução geral é a soma da solução complementar, x_c , com uma solução particular, x_p .
- ✈ A solução complementar é determinada igualando-se a zero o primeiro membro da equação, e como já discutido, é sempre amortecida, devido ao atrito sempre presente.
- ✈ Portanto, somente a solução particular, que descreve a vibração estacionária do sistema, permanece indefinidamente.



Amplitude e Ângulo de Fase

Aula 13

- Como a força aplicada é harmônica, o movimento em regime estacionário também é harmônico. Consequentemente, a solução particular tem a forma:

$$x_p = X' \cdot \text{sen}(\omega_0 \cdot t - \phi')$$

- Considerando que $\omega_n = \sqrt{k/m}$ e $c_c = 2 \cdot m \cdot \omega_n$, a amplitude X' e o ângulo de fase ϕ' podem ser determinados da seguinte forma:

$$X' = \frac{F_0/k}{\sqrt{[1 - (\omega_0/\omega_n)^2]^2 + [2 \cdot (c/c_c) \cdot (\omega_0/\omega_n)]^2}}$$

$$\theta' = \tan^{-1} \left[\frac{2 \cdot (c/c_c) \cdot (\omega_0/\omega_n)}{1 - (\omega_n/\omega_0)^2} \right]$$



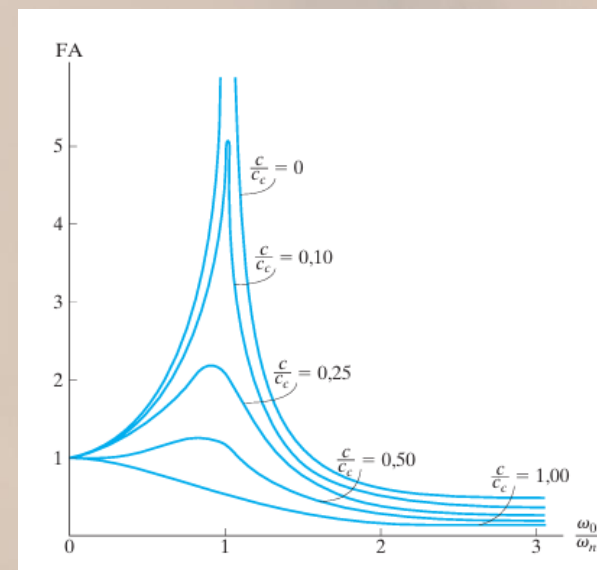
Fator de Amplificação

Aula 13

- 🌐 O fator de amplificação FA é definido como a razão entre a amplitude da deflexão provocada pela vibração forçada e a deflexão causada pela força estática F_0 , portanto:

$$FA = \frac{X'}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega_0/\omega_n)^2]^2 + [2 \cdot (c/c_c) \cdot (\omega_0/\omega_n)]^2}}$$

- 🌐 A figura mostra o gráfico do fator de amplificação FA versus a razão (ω_0/ω_n) para diferentes valores do fator de amortecimento (c/c_c) .
- 🌐 Pode-se observar nesse gráfico que FA aumenta à medida que o fator de amortecimento decresce.
- 🌐 A ressonância ocorre apenas quando o fator de amortecimento é nulo e a razão de frequência é igual a um.





Aplicações da Vibração Forçada Amortecida

Aula 13

-  A vibração forçada com amortecimento está presente em uma ampla variedade de sistemas mecânicos e estruturais, sendo fundamental na compreensão e no controle de fenômenos que ocorrem no cotidiano da engenharia.
-  Um dos exemplos mais comuns é encontrado na suspensão automotiva, onde os amortecedores trabalham em conjunto com as molas para controlar as vibrações induzidas pelo contato dos pneus com o solo.
-  As irregularidades do pavimento representam forças externas periódicas que excitam o sistema, e o amortecimento garante que a resposta vibratória não seja excessiva, evitando desconforto para os passageiros e reduzindo o desgaste prematuro de componentes.
-  Sem o efeito do amortecimento, a suspensão ficaria sujeita a oscilações prolongadas, prejudicando a dirigibilidade e a segurança do veículo.



Aplicações da Vibração Forçada Amortecida

Aula 13

-  Outro exemplo importante pode ser observado em máquinas rotativas, como turbinas, compressores e motores elétricos.
-  Nesses casos, o desbalanceamento do rotor gera uma força periódica que induz vibrações forçadas no sistema.
-  O amortecimento presente nos mancais, lubrificantes e suportes atua reduzindo a amplitude da resposta, especialmente quando a frequência de rotação se aproxima da frequência natural do conjunto, condição em que a ressonância poderia causar danos severos.
-  A análise da vibração forçada com amortecimento nesses equipamentos permite identificar níveis críticos de operação, dimensionar suportes e propor soluções de balanceamento que assegurem o funcionamento contínuo e confiável.



Aplicações da Vibração Forçada Amortecida

Aula 13

-  Nas estruturas civis, como pontes e edifícios, também é possível perceber aplicações práticas desse conceito.
-  As forças externas, vindas de ventos, tráfego ou até mesmo movimentos sísmicos, excitam os sistemas estruturais de forma periódica ou quase periódica.
-  O amortecimento estrutural, resultante de propriedades internas dos materiais ou de dispositivos específicos instalados, impede que as amplitudes vibratórias atinjam níveis perigosos.
-  Um exemplo notável é a utilização de amortecedores de massa sintonizados em arranha-céus, que funcionam como absorvedores dinâmicos para reduzir vibrações induzidas pelo vento, garantindo a estabilidade estrutural e o conforto dos ocupantes.



Aplicações da Vibração Forçada Amortecida

Aula 13

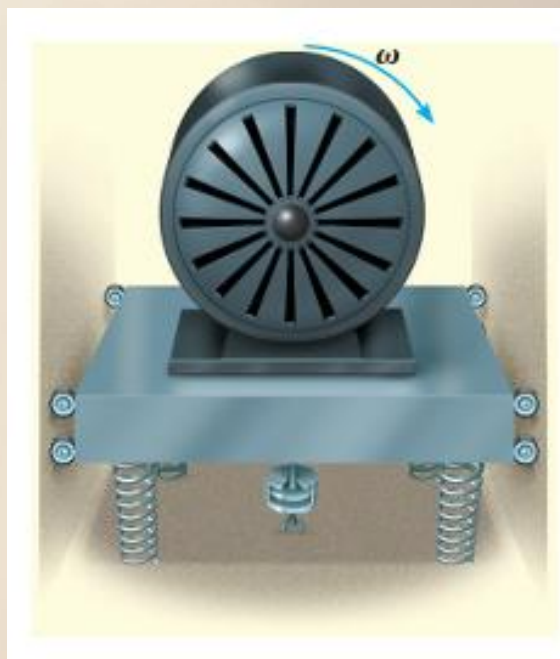
- ✈ Na indústria aeronáutica, a vibração forçada com amortecimento também se manifesta de maneira clara.
- ✈ Estruturas de asas, fuselagens e componentes internos estão sujeitas a forças externas periódicas, como as cargas aerodinâmicas variáveis e as oscilações de motores.
- ✈ O amortecimento, seja natural dos materiais ou introduzido por dispositivos adicionais, limita a resposta vibratória e evita falhas por fadiga.
- ✈ Essa análise é essencial não apenas para a segurança da aeronave, mas também para o desempenho, pois vibrações excessivas podem comprometer a eficiência aerodinâmica e aumentar os custos de manutenção.



Exemplo de Aplicação

Aula 13

- 🌀 O motor elétrico de 30 kg mostrado na figura está apoiado em quatro molas, cada uma com rigidez de 200 N/m. Considerando o rotor não balanceado, de modo que seu efeito seja equivalente a uma massa de 4 kg localizada a 60 mm do eixo de rotação, determine a amplitude de vibração para o rotor girando a $\omega = 10$ rad/s. O fator de amortecimento é $c/c_c = 0,15$.





Solução do Exemplo

Aula 13

- 🌐 A força periódica que causa a vibração devido ao rotor desbalanceado é dada por:

$$F_0 = m \cdot a_n \longrightarrow F_0 = m \cdot \omega_0^2 \cdot r$$

$$F_0 = 4 \cdot 10^2 \cdot 0,06 \longrightarrow F_0 = 4 \cdot 10^2 \cdot 0,06$$

$$F_0 = 24 \text{ N}$$

- 🌐 A frequência natural é calculada considerando-se 4 molas associadas em paralelo, resultando em:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} \longrightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{4 \cdot 200}{30}}$$

$$\omega_n = 5,164 \text{ rad/s}$$

- 🌐 A amplitude da vibração em regime permanente é determinada da seguinte forma:

$$X' = \frac{F_0/k}{\sqrt{[1 - (\omega_0/\omega_n)^2]^2 + [2 \cdot (c/c_c) \cdot (\omega_0/\omega_n)]^2}}$$

$$X' = \frac{24/800}{\sqrt{[1 - (10/5,164)^2]^2 + [2 \cdot 0,15 \cdot (10/5,164)]^2}}$$

$$X' = \frac{0,03}{\sqrt{[1 - 3,75]^2 + [2 \cdot 0,15 \cdot 1,936]^2}}$$

$$X' = \frac{0,03}{\sqrt{7,5625 + 0,3373}} \longrightarrow X' = \frac{0,03}{\sqrt{7,90}}$$

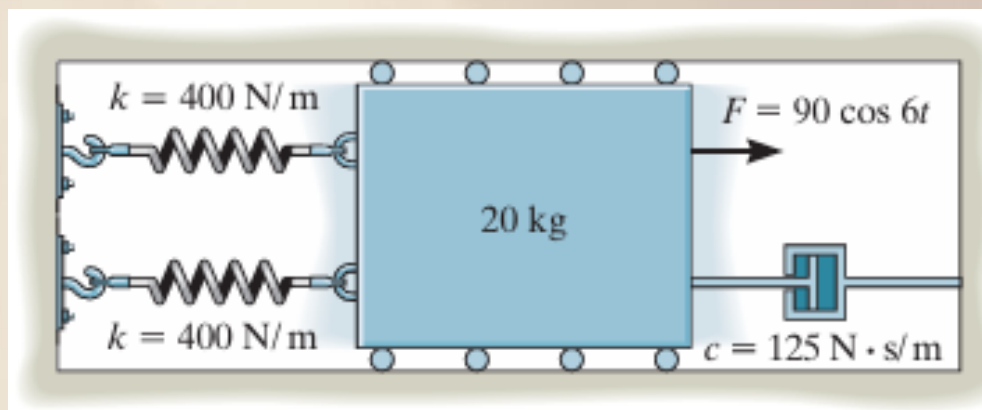
$$X' = \frac{0,03}{2,81} \longrightarrow X' = 0,0107 \text{ m} \longrightarrow X' = 10,7 \text{ mm}$$



Exercícios Propostos

Aula 13

1. O bloco de 20 kg está submetido à ação da força harmônica $F = 90 \cdot \cos(6 \cdot t)$ N, onde t é dado em segundos. Escreva a equação horária que descreve o movimento em regime permanente.

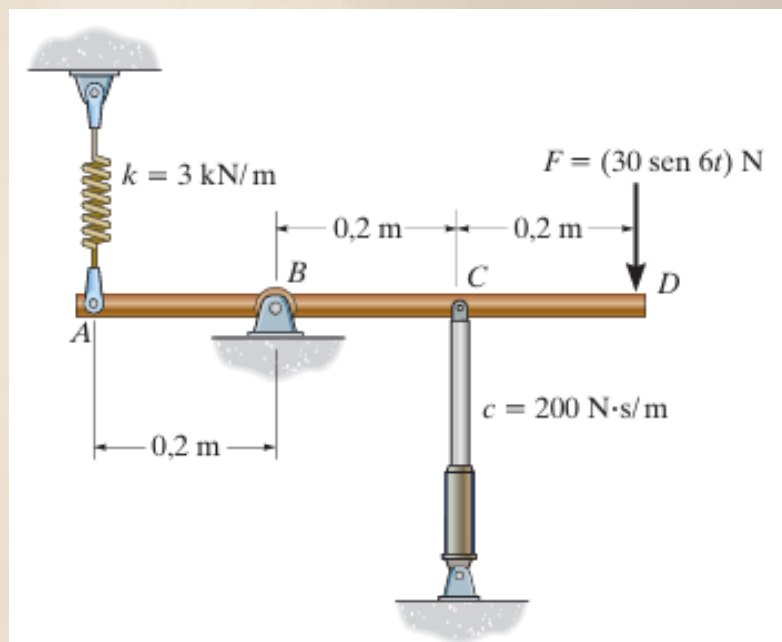




Exercícios Propostos

Aula 13

2. Se a barra de 12 kg for submetida a uma força periódica $F = 30 \cdot \sin(6 \cdot t)$ N, onde t é dado em segundos, determine a amplitude $\theta_{m\acute{a}x}$ da vibração em regime permanente da barra em torno do pino B. Considere que θ seja pequeno.



Obrigado Pela Atenção

Nos Encontramos na Próxima Aula

