



Vibrações Mecânicas

Prof. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues



Aula - 11

Vibração Livre com Amortecimento Viscoso



Conteúdos Abordados Nessa Aula

Aula 11

-  Vibração Livre com Amortecimento Viscoso;
-  Sistema Massa-Mola-Amortecedor;
-  Sistemas com Um Grau de Liberdade.



Vibração Livre com Amortecimento Viscoso

Aula 11

- ✈ A vibração livre com amortecimento ocorre quando um sistema mecânico, após ser perturbado de sua posição de equilíbrio, é liberado sem a ação de forças externas contínuas, mas com a presença de elementos dissipativos que reduzem progressivamente a energia vibratória.
- ✈ Diferentemente da vibração livre não amortecida, em que as oscilações se manteriam indefinidamente com a mesma amplitude em um modelo idealizado, a introdução do amortecimento faz com que a energia armazenada no sistema, seja em forma de energia cinética ou potencial elástica, seja gradualmente transformada em calor ou dissipada por atrito, até que o movimento seja completamente extinto.
- ✈ Esse fenômeno reflete uma situação real mais próxima dos sistemas físicos, pois todo material ou mecanismo está sujeito a algum nível de dissipação.



Vibração Livre com Amortecimento Viscoso

Aula 11

-  Fisicamente, o comportamento da vibração livre com amortecimento pode ser descrito pela equação diferencial do movimento, em que o termo de amortecimento é proporcional à velocidade da massa.
-  A solução dessa equação mostra que a amplitude da oscilação diminui exponencialmente com o tempo, resultando em um movimento oscilatório atenuado.
-  O regime da vibração depende da intensidade do amortecimento: no caso de amortecimento leve, o sistema ainda oscila em torno da posição de equilíbrio, mas com amplitude decrescente; em condições de amortecimento crítico, o sistema retorna ao equilíbrio no menor tempo possível sem oscilar; e, para amortecimento supercrítico, o retorno ocorre de forma mais lenta, também sem oscilações.
-  Esses diferentes regimes são fundamentais para projetar sistemas que necessitam de controle adequado do movimento vibratório.



Vibração Livre com Amortecimento Viscoso

Aula 11

- ✈ Na análise de vibrações mecânicas, compreender a vibração livre com amortecimento é essencial porque permite prever como máquinas e estruturas responderão a perturbações iniciais, como impactos, deslocamentos súbitos ou variações momentâneas de carga.
- ✈ Esse conhecimento é aplicado, por exemplo, no projeto de suspensões automotivas, onde se busca um amortecimento adequado que evite tanto oscilações prolongadas quanto respostas excessivamente rígidas, garantindo conforto e segurança.
- ✈ Da mesma forma, em sistemas industriais e estruturais, a consideração do amortecimento permite reduzir os riscos de fadiga, minimizar ruídos indesejados e prolongar a vida útil dos componentes.
- ✈ Assim, a vibração livre com amortecimento é um conceito fundamental na dinâmica de sistemas, pois descreve de maneira realista como a energia vibratória é dissipada ao longo do tempo.



Vibração Livre com Amortecimento Viscoso

Aula 11

- 🌐 A análise do movimento de vibração considerada anteriormente não incluía os efeitos do atrito ou amortecimento no sistema, de modo que as soluções obtidas são apenas aproximadas.
- 🌐 Como todas as vibrações livres desaparecem com o tempo, é necessário incluir na análise o efeito de forças de amortecimento.
- 🌐 Em muitos casos o amortecimento é atribuído à resistência criada pela substância, como água, óleo ou ar, na qual o sistema vibra.
- 🌐 Para um corpo que se move lentamente no meio fluido, a resistência ao movimento é diretamente proporcional à velocidade do corpo, sendo que a força desse tipo é denominada força de amortecimento viscoso e a intensidade dessa força é expressa por uma equação da forma:

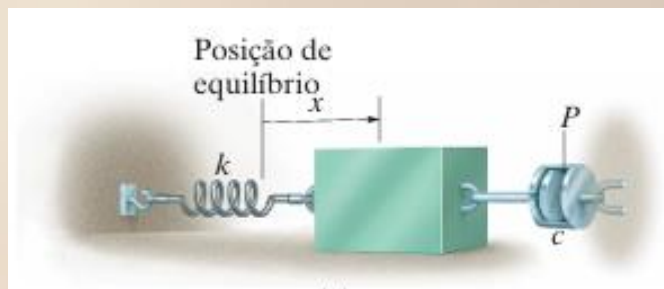
$$F = c \cdot \dot{x}$$



Vibração Livre com Amortecimento Viscoso

Aula 11

- 🌐 O movimento vibratório de um corpo ou sistema com amortecimento viscoso pode ser caracterizado pelo bloco e mola mostrados na figura.
- 🌐 O efeito do amortecimento é incluído no modelo pelo amortecedor ligado ao bloco no lado direito.
- 🌐 Ocorre amortecimento quando o pistão P no interior do cilindro se move para a direita ou para a esquerda.
- 🌐 O cilindro contém um fluido, e o movimento do pistão é retardado, pois o fluido deve escoar ao redor do pistão ou através de um pequeno orifício nesse pistão.
- 🌐 Supõe-se que o amortecedor apresenta um coeficiente de amortecimento viscoso c .

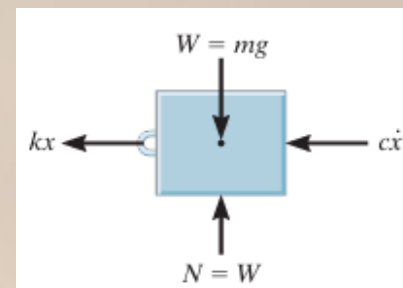
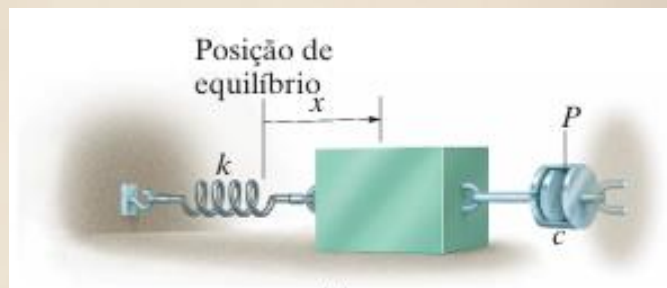




Equação de Movimento

Aula 11

- A figura mostra o diagrama de corpo livre do bloco, considerando que ele foi deslocado de uma distância x a partir de sua posição de equilíbrio.
- Tanto a força da mola $k \cdot x$ quanto a força de amortecimento $c \cdot \dot{x}$ opõem-se ao movimento para a frente apresentado pelo bloco, e a aplicação da equação de movimento resulta em:



$$\sum F_x = m \cdot a_x$$



$$-k \cdot x - c \cdot \dot{x} = m \cdot \ddot{x}$$



Solução da Equação de Movimento

Aula 11

- ☉ A equação de movimento $-k \cdot x - c \cdot \dot{x} = m \cdot \ddot{x}$, que é uma equação diferencial ordinária, linear, de segunda ordem, homogênea, tem solução da forma:

$$x = e^{\lambda \cdot t}$$

- ☉ e , é a base dos logaritmos naturais e λ é uma constante. O valor de λ pode ser obtido substituindo-se essa solução na de movimento, fornecendo:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0$$

$$m \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot t} + c \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot t} + k \cdot e^{\lambda \cdot t} = 0$$

$$e^{\lambda \cdot t} \cdot (m \cdot \lambda^2 + c \cdot \lambda + k) = 0$$



Solução da Equação de Movimento

Aula 11

Como $e^{\lambda \cdot t}$ nunca é zero, uma solução será possível se impusermos:

$$(m \cdot \lambda^2 + c \cdot \lambda + k) = 0$$

Resolvendo essa equação do segundo grau, obtemos dois valores de λ :

$$\lambda_1 = -\frac{c}{2 \cdot m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2 \cdot m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

$$\lambda_2 = -\frac{c}{2 \cdot m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2 \cdot m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

A solução geral da equação é, portanto, uma combinação linear de exponenciais que envolve essas duas raízes. Há três possibilidades de combinação de λ_1 e λ_2 que devem ser consideradas.



Coeficiente de Amortecimento Crítico

Aula 11

- ✈ Antes de discutir as três combinações de λ_1 e λ_2 , definiremos o coeficiente de amortecimento crítico c_c como o valor de c que anula o radicando nas raízes λ_1 e λ_2 , portanto:

$$\left(\frac{c_c}{2 \cdot m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0$$

$$c_c = 2 \cdot m \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$c_c = 2 \cdot m \cdot \omega_n$$



- ✈ Quando $c > c_c$, as raízes λ_1 e λ_2 são reais negativas. A solução geral da equação pode, então, ser escrita como:

$$x = A \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + B \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}$$

- ✈ O movimento correspondente a essa solução é não vibratório. O efeito do amortecimento é tão intenso que, quando o bloco é deslocado e solto, ele simplesmente volta para a posição inicial sem oscilar. Diz-se que o sistema é superamortecido.



- ✈ Se $c = c_c$, então, $\lambda_1 = \lambda_2 = -c_c/2 \cdot m = -\omega_n$.
- ✈ Essa situação é conhecida como amortecimento crítico, pois ela representa a condição para a qual c tem o menor valor necessário para o sistema ser não vibratório.
- ✈ Usando os métodos de equações diferenciais, podemos mostrar que a solução da equação geral para o amortecimento crítico é:

$$x = (A + B \cdot t) \cdot e^{-\omega_n \cdot t}$$



- ☉ Geralmente, na maioria dos casos, $c < c_c$. Nessa situação o sistema é dito subamortecido.
- ☉ As raízes λ_1 e λ_2 são números complexos conjugados e a solução geral da equação pode ser escrita na forma:

$$x = D \cdot [e^{-(c/2 \cdot m) \cdot t} \cdot \sin(\omega_d \cdot t + \phi)]$$

- ☉ Nessa equação, D e ϕ são constantes que podem ser determinadas pelas condições iniciais do problema, isto é, pelos valores da posição e da velocidade iniciais. A constante ω_d é denominada frequência angular (ou pulsação) natural amortecida do sistema. Seu valor é dado por:

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2 \cdot m}\right)^2} = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_c}\right)^2}$$

- ☉ A razão c/c_c é conhecida como fator de amortecimento.

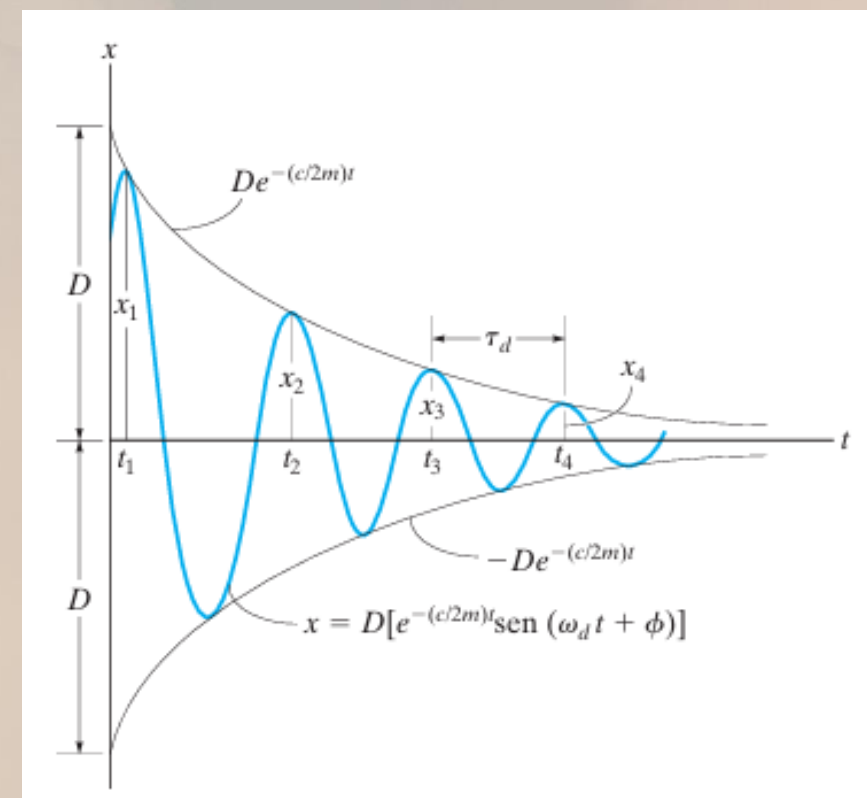


Gráfico do Sistema Subamortecido

Aula 11

- A figura mostra o gráfico do sistema subamortecido.
- Devido à função exponencial, o deslocamento limite do sistema decresce a cada ciclo. Usando a pulsação natural amortecida o período, pode ser escrito como:
- Como $\omega_d < \omega_n$, o período da vibração amortecida, τ_d , é maior do que o período da vibração não amortecida, $\tau = 2 \cdot \pi / \omega_n$

$$\tau_d = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_d}$$





Decremento Logarítmico

Aula 11

-  O decremento logarítmico é uma grandeza fundamental na análise da vibração livre com amortecimento, pois descreve de maneira quantitativa a taxa de decaimento da amplitude de oscilação em sistemas vibratórios.
-  Quando um sistema é perturbado e inicia um movimento vibratório, a presença do amortecimento faz com que a energia seja gradualmente dissipada, geralmente na forma de calor, devido à resistência viscosa ou atritos presentes no mecanismo.
-  Como consequência, as amplitudes sucessivas do movimento não se mantêm constantes, mas diminuem progressivamente até que o sistema retorne ao estado de equilíbrio.
-  O decremento logarítmico mede exatamente essa redução da amplitude de um ciclo vibratório para o ciclo seguinte, permitindo avaliar de forma prática a intensidade do amortecimento.



Decremento Logarítmico

Aula 11

- ✈ Fisicamente, o decremento logarítmico é definido como o logaritmo natural da razão entre duas amplitudes sucessivas da vibração, geralmente separadas por um período.
- ✈ Essa medida independe da magnitude absoluta do movimento, já que se baseia na relação entre amplitudes, o que a torna extremamente útil em ensaios experimentais.
- ✈ Quanto maior for o valor do decremento logarítmico, maior é a taxa de dissipação de energia do sistema e, portanto, mais rapidamente a vibração é atenuada.
- ✈ Em contrapartida, valores baixos indicam que o sistema apresenta um amortecimento reduzido, o que resulta em vibrações mais duradouras.



Decremento Logarítmico

Aula 11

- ✈ Na prática, o decremento logarítmico é aplicado em diferentes áreas da engenharia para determinar o coeficiente de amortecimento de sistemas sem a necessidade de conhecer previamente todas as suas propriedades físicas.
- ✈ Por exemplo, em testes com estruturas metálicas, mede-se a redução de amplitudes de deslocamento após um impacto inicial para estimar a capacidade de dissipação de energia do material e dos elementos de fixação.
- ✈ Em veículos, ele pode ser utilizado para avaliar a eficiência de amortecedores, comparando o comportamento de oscilações sucessivas após a suspensão ser excitada.



Decremento Logarítmico

Aula 11

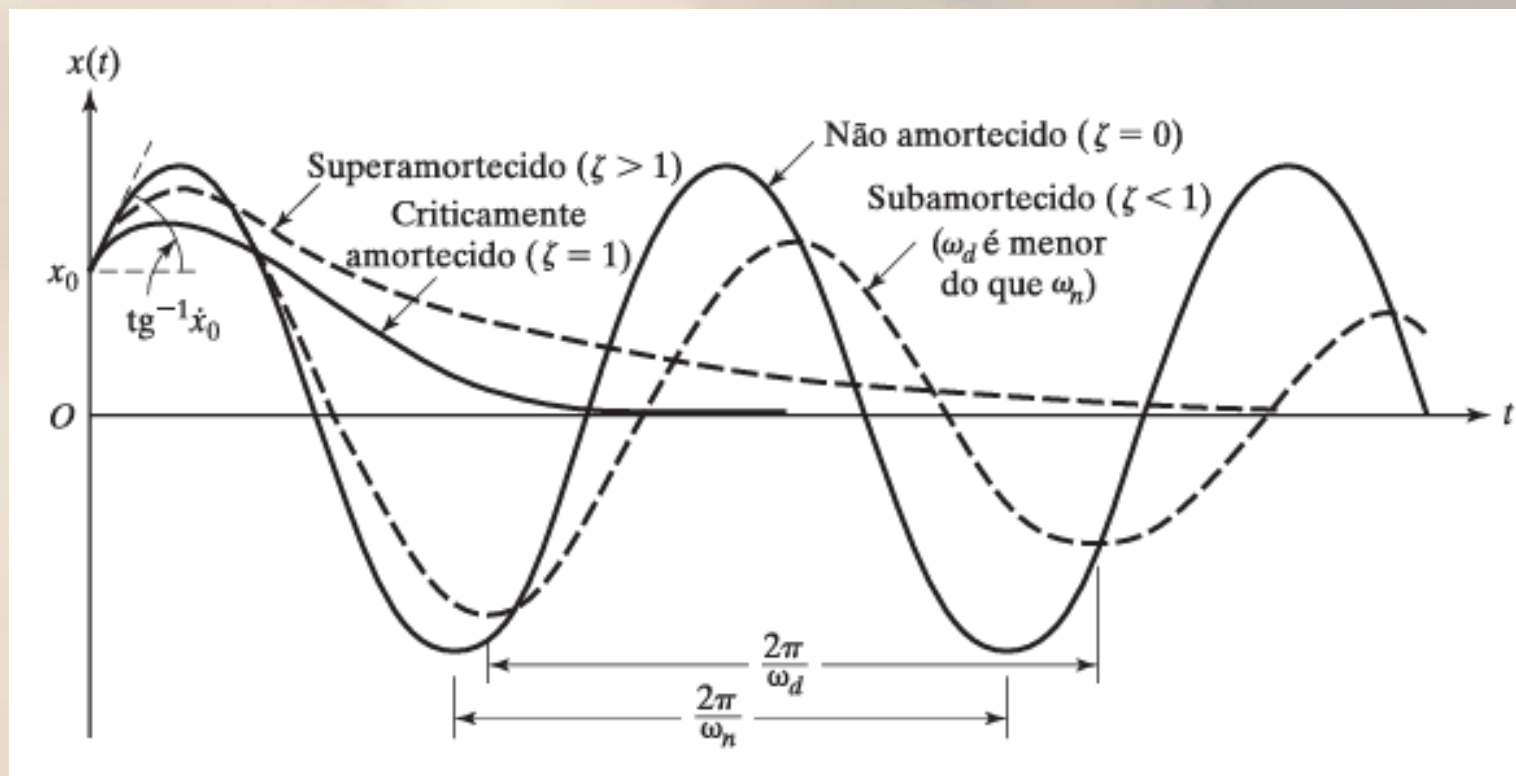
- Assim, o decremento logarítmico desempenha papel central no estudo de vibrações livres com amortecimento, oferecendo um método simples e eficaz para caracterizar a atenuação de movimentos oscilatórios.
- Sua relevância vai além da teoria, pois possibilita a verificação experimental e prática de parâmetros essenciais em projetos de máquinas, veículos e estruturas, garantindo a confiabilidade e a segurança no desempenho dinâmico desses sistemas.

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_d} \cdot \frac{c}{2 \cdot m}$$



Comparação do Sistema Vibratório Amortecido

Aula 11





- 🌐 A vibração livre com amortecimento está presente em diversos sistemas do cotidiano e sua análise é fundamental para garantir segurança, conforto e durabilidade em máquinas e estruturas.
- 🌐 Um exemplo clássico de aplicação prática encontra-se nas suspensões automotivas, em que o conjunto mola-amortecedor atua para absorver os impactos provenientes das irregularidades do solo, quando o veículo passa por um obstáculo, ocorre uma excitação inicial que gera vibração livre.
- 🌐 O papel do amortecedor é justamente dissipar a energia dessa vibração, evitando que o carro oscile repetidamente e proporcionando maior estabilidade e conforto aos ocupantes.



- ☉ Outro exemplo prático é observado em pontes e passarelas, onde o vento, a passagem de veículos ou de pedestres podem induzir deslocamentos súbitos.
- ☉ A presença de amortecedores estruturais garante que as oscilações provocadas por essas excitações iniciais sejam reduzidas de forma controlada, prevenindo movimentos excessivos que comprometeriam tanto a segurança estrutural quanto a sensação de estabilidade para os usuários.
- ☉ Esses dispositivos são projetados para atuar dentro de regimes específicos de amortecimento, garantindo o retorno rápido da estrutura ao equilíbrio.



- ✈ Na indústria, máquinas rotativas como turbinas, compressores e motores também apresentam vibrações livres após paradas súbitas ou falhas transitórias.
- ✈ O amortecimento introduzido por mancais fluidodinâmicos ou sistemas de lubrificação auxilia na dissipação da energia vibratória, evitando que oscilações persistentes causem danos por fadiga ou desgaste prematuro.
- ✈ Esse comportamento controlado é essencial para manter a confiabilidade e prolongar a vida útil dos equipamentos.



- ✈ Outro campo de aplicação relevante é o da engenharia civil em edifícios de grande altura. Estruturas como arranha-céus podem sofrer deslocamentos iniciais provocados por ventos ou pequenos tremores.
- ✈ O emprego de amortecedores de massa sintonizada permite que as oscilações livres sejam reduzidas de maneira eficiente, trazendo maior conforto aos ocupantes e preservando a integridade da construção.
- ✈ Assim, a vibração livre com amortecimento está presente em inúmeros setores e sua compreensão prática permite o desenvolvimento de soluções que conciliam desempenho, segurança e conforto em sistemas dinâmicos.

Obrigado Pela Atenção

Nos Encontramos na Próxima Aula

