EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

Vibrações Mecânicas

Prof. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues

EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

Aula - 10

Vibração Forçada não Amortecida

Conteúdos Abordados Nessa Aula

- Vibração Forçada não Amortecida;
- Sistema Massa-Mola;
- Sistemas com Um Grau de Liberdade;

EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

Definição de Vibração Forçada não Amortecida

- Considera-se a vibração forçada não amortecida um dos tipos mais importantes de movimento vibratório em trabalhos de engenharia.

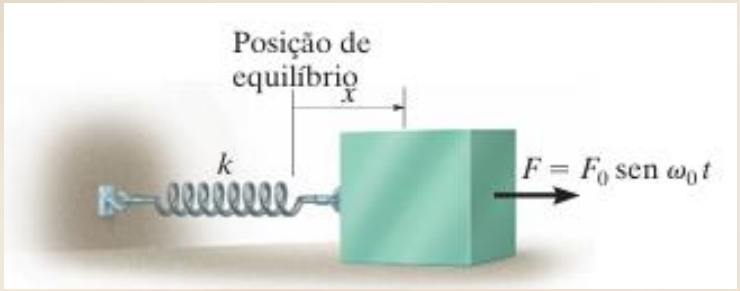
- Os princípios que descrevem a natureza desse movimento podem ser usados para se analisarem as forças que causam vibração em muitos tipos de máquina e estruturas.

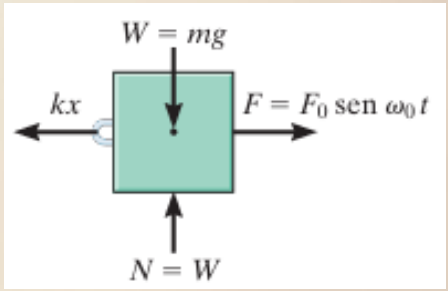
Mesas vibradoras fornecem uma vibração forçada e são usadas para separar materiais granulares.

Equação para Força Periódica

- O bloco e mola mostrados na figura são um modelo conveniente para representar as características vibratórias de um sistema submetido a uma força periódica $F = F_0 \cdot \text{sen}(\omega_0 \cdot t)$. Essa força tem amplitude F_0 e frequência angular ω.

- A figura mostra o diagrama de corpo livre para o bloco deslocado de uma distância x. A aplicação da equação de movimento resulta em:





$$F_0 \cdot \text{sen}(\omega_0 \cdot t) - k \cdot x = m \cdot \ddot{x}$$

$$\frac{F_0}{m} \cdot \text{sen}(\omega_0 \cdot t) - \frac{k}{m} \cdot x = \ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = \frac{F_0}{m} \cdot \text{sen}(\omega_0 \cdot t)$$

- Essa equação é uma equação diferencial de segunda ordem não homogênea, cuja solução geral consiste em uma solução "complementar", x_c mais uma solução particular, x_p.

EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

Solução Complementar da Equação

- A solução complementar é determinada estabelecendo-se o termo do lado direito da equação igual a zero e solucionando a equação homogênea resultante. Como resultado, obtém-se a mesma solução definida anteriormente, ou seja:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = \frac{F_0}{m} \cdot \operatorname{sen}(\omega_0 \cdot t)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

$$x_c = A \cdot \operatorname{sen} \omega_n \cdot t + B \cdot \cos \omega_n \cdot t$$

$$x_c = C \cdot \operatorname{sen}(\omega_n \cdot t + \emptyset)$$

EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

Solução Particular da Equação

- Como o movimento é periódico, uma solução particular da equação pode ser determinada propondo-se uma solução da forma:

$$x_p = X \cdot \text{sen} \cdot \omega_0 \cdot t$$

- Calculando-se as derivadas de primeira e segunda ordem, tem-se que:

$$\dot{x} = \omega_0 \cdot X \cdot \cos \cdot \omega_0 \cdot t$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 \cdot X \cdot \text{sen} \cdot \omega_0 \cdot t$$

- Substituindo na equação de vibração forçada, pode-se escrever que:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = \frac{F_0}{m} \cdot \text{sen}(\omega_0 \cdot t)$$

$$-\omega_0^2 \cdot X \cdot \text{sen} \cdot \omega_0 \cdot t + \frac{k}{m} \cdot X \cdot \text{sen} \cdot \omega_0 \cdot t = \frac{F_0}{m} \cdot \text{sen}(\omega_0 \cdot t)$$

EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

Solução Particular da Equação

- Solucionando e equação para X, tem-se que:

$$-\omega_0^2 \cdot X \cdot \text{sen} \cdot \omega_0 \cdot t + \frac{k}{m} \cdot X \cdot \text{sen} \cdot \omega_0 \cdot t = \frac{F_0}{m} \cdot \text{sen}(\omega_0 \cdot t)$$

$$\text{sen} \cdot \omega_0 \cdot t \cdot \left(-\omega_0^2 \cdot X + \frac{k}{m} \cdot X\right) = \frac{F_0}{m} \cdot \text{sen}(\omega_0 \cdot t)$$

$$-\omega_0^2 \cdot X + \frac{k}{m} \cdot X = \frac{F_0}{m}$$

$$X \cdot \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right) = \frac{F_0}{m}$$

$$X = \frac{\frac{F_0}{m}}{\left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right)} \quad \Rightarrow \quad X = \frac{\frac{F_0}{m}}{\frac{k}{m} \cdot \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_n^2}\right)}$$

$$X = \frac{\frac{F_0}{m} \cdot \frac{m}{k}}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_n}\right)^2}$$

$$X = \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_n}\right)^2}$$

- Substituindo na solução particular, tem-se que:

$$x_p = X \cdot \text{sen} \cdot \omega_0 \cdot t$$

$$x_p = \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_n}\right)^2} \cdot \text{sen} \cdot \omega_0 \cdot t$$

EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

Solução Geral da Equação

- Portanto, a solução geral da equação é dada por:

$$x = x_c + x_p$$

$$x = C \cdot \text{sen}(\omega_n \cdot t + \emptyset) + \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_n}\right)^2} \cdot \text{sen} \cdot \omega_0 \cdot t$$

- Nessa equação, x descreve dois tipos de movimento vibratório do bloco.
- A solução complementar x_c define a vibração livre, que depende da frequência angular $\omega_n = \sqrt{k/m}$ e das constantes C e $\emptyset$.
- A solução particular x_p descreve a vibração forçada do bloco causada pela força $F_0 \cdot \text{sen}(\omega_0 \cdot t)$.

Vibração Transitória e Permanente

- Como todos os sistemas vibrantes estão, na realidade, sujeitos a atrito, a vibração livre, se atenua com o passar do tempo e tende a desaparecer.
- Por essa razão, a vibração livre é denominada transitória.
- Por sua vez, a vibração forçada é chamada de vibração em regime estacionário ou permanente, pois se mantém indefinidamente

Fator de Amplificação

- Pode-se observar que a amplitude da vibração forçada X depende da razão de frequências (ω_0/ω_n).

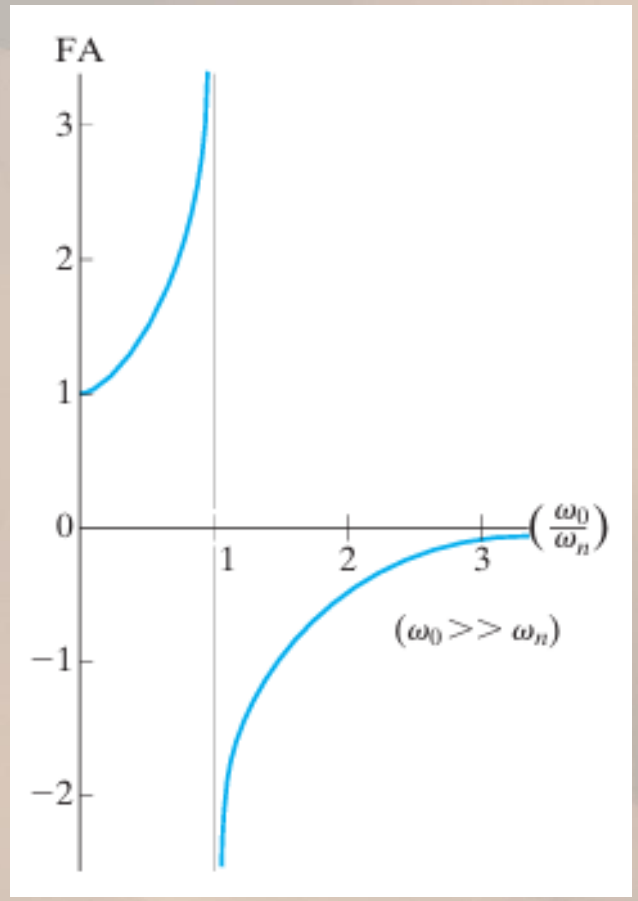
- Definindo o fator de amplificação FA como a razão entre a amplitude de vibração no regime permanente, X e a deflexão estática F_0/k, que seria produzida pela amplitude da força periódica F_0 , pode-se escrever que:

$$X = \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_n}\right)^2}$$

$$F.A = \frac{X}{F_0/k} \quad \Rightarrow \quad F.A = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_n}\right)^2}$$

Ressonância

- A equação pode ser representada graficamente.
- Observe que, se a força ou deslocamento for aplicada com uma frequência próxima da frequência natural do sistema, ou seja, $(\omega_0/\omega_n) \approx 1$,a amplitude de vibração do bloco se tornará extremamente grande.
- Isso ocorre porque a força *F* é aplicada ao bloco, de maneira que ela sempre segue seu movimento. Essa condição é chamada de ressonância.
- Na prática, vibrações ressonantes podem causar tensões enormes e a rápida quebra de peças.



$$F.A = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_n}\right)^2}$$

EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

Efeitos da Ressonância

- A ressonância, na análise de vibrações mecânicas, é um fenômeno físico que ocorre quando a frequência de uma excitação externa aplicada a um sistema coincide ou se aproxima de sua frequência natural de vibração.

- Nessa condição, a troca de energia entre a força excitadora e o sistema torna-se extremamente eficiente, resultando em um acúmulo progressivo de energia vibratória e, consequentemente, em um aumento significativo da amplitude das oscilações.

- Do ponto de vista físico, a ressonância pode ser entendida como uma sincronização entre o ritmo da força externa e a resposta natural do sistema, de modo que cada ciclo da excitação contribui para intensificar o movimento, em vez de atenuá-lo.

Efeitos da Ressonância

- Embora esse fenômeno seja explorado de forma positiva em diversas aplicações, como na geração de ondas sonoras em instrumentos musicais ou no funcionamento de dispositivos oscilatórios, em sistemas mecânicos e estruturais ele é frequentemente indesejado, pois pode provocar esforços excessivos, fadiga prematura e até falhas catastróficas.

- Estruturas como pontes, edifícios, turbo-máquinas e veículos estão sujeitas a condições de ressonância se não forem devidamente projetadas para evitar a coincidência entre frequências naturais e excitações externas, como rajadas de vento, rotações de motores ou irregularidades do solo.

- Dessa forma, a ressonância é um conceito fundamental na engenharia de vibrações, pois evidencia a importância de compreender e controlar as frequências naturais de um sistema a fim de garantir sua segurança, durabilidade e desempenho.

Efeitos da Ressonância

- Os efeitos provocados pela ressonância na análise de vibrações mecânicas são de grande relevância, pois representam uma das principais causas de falhas em sistemas dinâmicos quando não devidamente controlados.

- Quando um sistema é excitado em sua frequência natural, a energia fornecida pela excitação é continuamente acumulada, e isso gera um aumento significativo na amplitude das oscilações. Esse crescimento pode ser tão intenso que ultrapassa os limites de resistência dos materiais, levando à ocorrência de fadiga estrutural, deformações permanentes ou até mesmo rupturas catastróficas.

- Além dos danos físicos, a ressonância também pode provocar efeitos indesejáveis como ruídos excessivos, desconforto para operadores e usuários, perda de eficiência energética e redução da vida útil de componentes mecânicos.

- Em máquinas rotativas, por exemplo, a ressonância pode gerar vibrações que comprometem o alinhamento de eixos, provocam desgaste prematuro de rolamentos e danificam engrenagens.

Efeitos da Ressonância

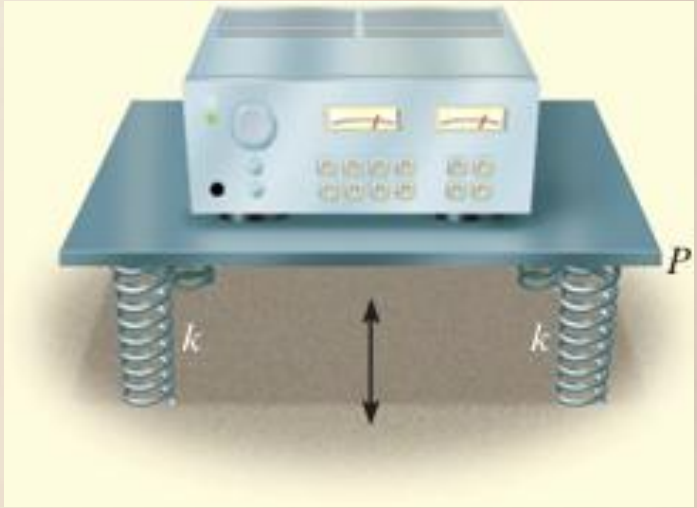
- Em estruturas civis, como pontes e edifícios, a coincidência entre frequências naturais e excitações externas, como ventos, tráfego ou terremotos, pode gerar oscilações perigosas que comprometem a estabilidade global.

- No campo automotivo, a ressonância pode reduzir o conforto e a segurança, ao transmitir vibrações indesejáveis para a carroceria e os ocupantes.

- Portanto, os efeitos da ressonância não se limitam apenas a um fenômeno físico de amplificação de vibrações, mas se traduzem em problemas práticos que impactam diretamente a durabilidade, a segurança e o desempenho de sistemas mecânicos e estruturais, justificando a importância de seu estudo e controle na engenharia.

Exemplo de Aplicação

- O instrumento mostrado na figura está preso rigidamente à plataforma P, que por sua vez é suportada por quatro molas, cada uma com uma rigidez k = 800 N/m. A plataforma está inicialmente em repouso. Num dado instante, o piso passa a sofrer um deslocamento $\delta = 10 \cdot \mathrm{sen}(8 \cdot t)$ mm, onde t é dado em segundos. Suponha que a massa total do instrumento e da plataforma seja de 20 kg. Determine a amplitude da vibração em regime permanente e calcule qual a frequência da vibração do chão necessária para causar ressonância.



EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

Solução do Exemplo

- A frequência natural é calculada considerando-se 4 molas associadas em paralelo, resultando em:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{4 \cdot 800}{20}}$$

$$\omega_n = 12{,}65\ \text{rad/s}$$

- A amplitude da vibração em regime permanente é determinada considerando-se a relação $k \cdot \delta_0$ substituindo F_0, resultando em:

$$X = \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_n}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad X = \frac{\frac{k \cdot \delta_0}{k}}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_n}\right)^2}$$

$$X = \frac{\delta_0}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_n}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad X = \frac{10}{1 - \left(\frac{8}{12{,}65}\right)^2}$$

$$X = 16{,}7\ \text{mm}$$

- Ocorrerá ressonância quando a amplitude de vibração provocada pelo deslocamento do piso se aproximar do infinito. Essa situação será obtida quando:

$$\omega_0 = \omega_n = 12{,}65\ \text{rad/s}$$

EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

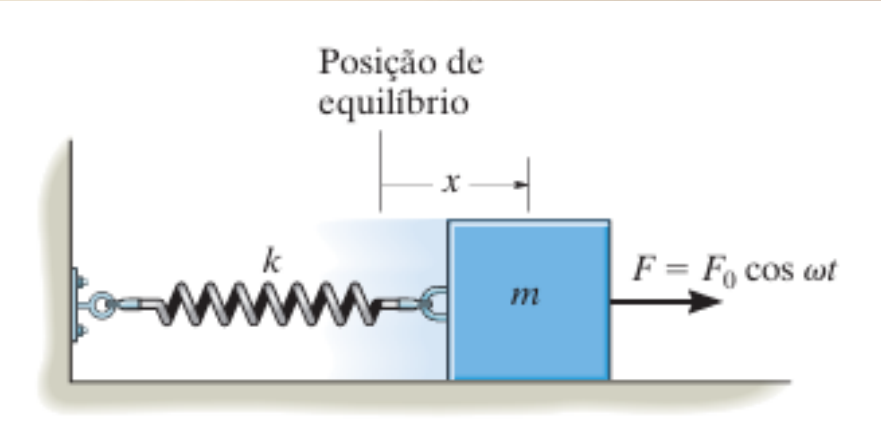
Exercícios Propostos

- 1. Um bloco que possui massa *m* é suspenso por uma mola com uma rigidez *k*. Se uma força vertical para baixo $F = F_0$ é aplicada sobre o peso, determine a equação que descreve a posição do bloco em função do tempo.

- 2. Um bloco de 4 kg está suspenso em uma mola de rigidez *k* = 600 N/m. Puxa-se o bloco para baixo 50 mm de sua posição de equilíbrio. O bloco é, então, solto a partir do repouso no instante t = 0. Impondo ao suporte um deslocamento $\delta = 10 \cdot \mathrm{sen}(4 \cdot t)$ mm, onde t é dado em segundos, determine a equação que descreve o movimento vertical do bloco. Suponha que o deslocamento positivo seja para baixo.

Exercícios Propostos

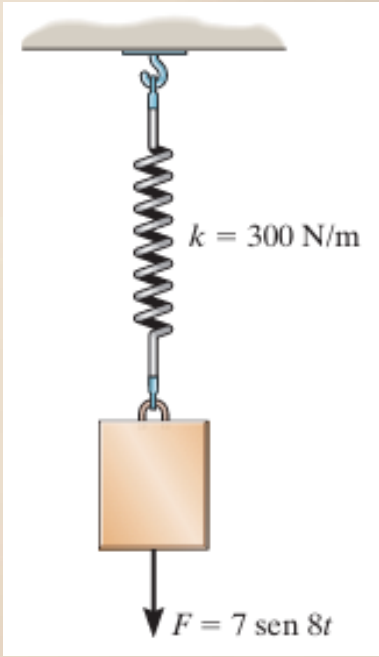
3. Se o modelo de bloco e mola é submetido à força periódica $F = F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$, demonstre que a equação diferencial de movimento é $\ddot{x} + (k/m) \cdot x = (F_0/m) \cdot \cos(\omega \cdot t)$, onde x é medido a partir da posição de equilíbrio do bloco. Qual é a solução geral dessa equação?



EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

Exercícios Propostos

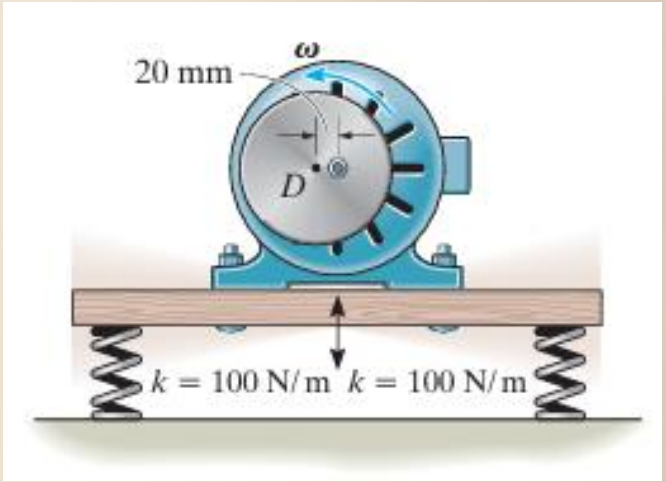
4. Um bloco de 5 kg está suspenso por uma mola de rigidez igual a 300 N/m. Se o bloco está submetido a uma força vertical $F = 7 \cdot \text{sen}(8 \cdot t)$ N, onde t é dado em segundos, determine a equação que descreve o movimento do bloco quando ele é empurrado para baixo 100 mm de sua posição de equilíbrio e solto a partir do repouso no instante t = 0. Suponha que os deslocamentos positivos sejam para baixo.



EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

Exercícios Propostos

5. O motor elétrico tem massa de 50 kg e é suportado por quatro molas, cada uma com rigidez de 100 N/m. Se o motor gira um disco montado excentricamente, a 20 mm do eixo, determine a velocidade angular de rotação ω para a qual ocorre ressonância. Suponha que o motor vibre apenas na direção vertical.



Obrigado Pela Atenção

Nos Encontramos na Próxima Aula

EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA