EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

Vibrações Mecânicas

Prof. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues

EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

Aula - 8

Vibração Livre não Amortecida

Conteúdos Abordados Nessa Aula

- Vibração Livre não Amortecida;
- Sistema Massa-Mola;
- Sistemas com Um Grau de Liberdade;
- Solução de Exercícios.

EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

Exemplo de Aplicação

- A coluna da caixa d'água mostrada na figura possui 100 m de altura e é feita de concreto reforçado com uma seção transversal tubular com 2,5 m de diâmetro interno e 3,1 m de diâmetro externo. Quando cheia, a massa da caixa d'água é de 3×10^5 kg. Desprezando a massa da coluna e admitindo E = 27,58 GPa, determine:

  A) A Frequência natural e o período natural transversal de vibração da caixa.

  B) A resposta de vibração da caixa d'água resultante de um deslocamento transversal inicial de 0,25 m.

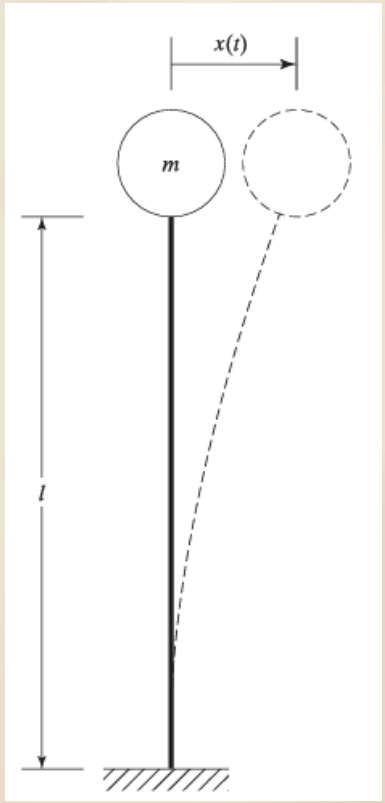
  C) Os valores máximos da velocidade e da aceleração experimentados pela caixa d'água.

EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

Solução do Exemplo

- Analogia do Sistema:

- Admitindo que a caixa d'água seja uma massa pontual, que a colune tenha uma seção transversal uniforme de massa desprezível, o sistema pode ser modelados como uma viga em balanço com uma carga concentrada na extremidade livre, conforme mostrado na figura.



- Para essa situação, a deflexão é dada por:

$$\delta = \frac{P \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

- A rigidez da viga é dada por:

$$P = k \cdot \delta \quad \Rightarrow \quad k = \frac{P}{\delta} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{l^3}$$

- Sabe-se que o momento de inércia da seção transversal tubular é:

$$I = \frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4) \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\pi}{64} \cdot (3{,}1^4 - 2{,}5^4)$$

$$I = 2{,}616\ \text{m}^4$$

EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

Solução do Exemplo

- Assim, a rigidez é:

$$k = \frac{P}{\delta} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{l^3} \rightarrow k = \frac{3 \cdot 27{,}58 \cdot 10^9 \cdot 2{,}616}{100^3}$$

$$k = 216447{,}84 \text{ N/m}$$

- Portanto, a frequência natural de oscilação do sistema é:

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{216447{,}84}{300000}} \rightarrow \omega_n = 0{,}849 \text{ rad/s}$$

- O Período é dado por:

$$\tau = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_n} \rightarrow \tau = \frac{2 \cdot \pi}{0{,}849} \rightarrow \tau = 7{,}40 \text{ s}$$

- B) Resposta de vibração do sistema:

- Considerando o deslocamento inicial $x_0 = 0{,}25$ m, e a velocidade inicial $\dot{x_0} = 0$, a resposta harmônica do sistema pode ser expressa por:

$$x = A \cdot \operatorname{sen} \omega_n \cdot t + B \cdot \cos \omega_n \cdot t$$

EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

Solução do Exemplo

- Considerando o deslocamento inicial $x_0 = 0{,}25$ m, e a velocidade inicial $\dot{x_0} = 0$, a resposta harmônica do sistema pode ser expressa por:

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega_n \cdot t) + B \cdot \cos(\omega_n \cdot t)$$

- As constantes *A* e *B*, são:

$$A = \frac{\dot{x_0}}{\omega_n} \qquad B = x_0$$

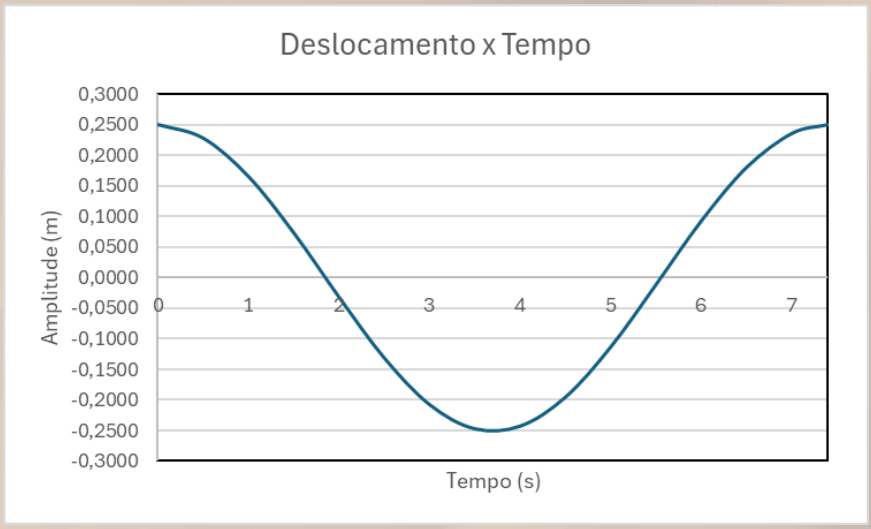
- Aplicado as condições de contorno iniciais, a equação que define a resposta harmônica do sistema é dada por:

$$x = \frac{\dot{x_0}}{\omega_n} \cdot \text{sen}(\omega_n \cdot t) + x_0 \cdot \cos(\omega_n \cdot t)$$

$$x = \frac{0}{0{,}849} \cdot \text{sen}(0{,}849 \cdot t) + 0{,}25 \cdot \cos(0{,}849 \cdot t)$$

$$x = 0{,}25 \cdot \cos(0{,}849 \cdot t)\ \text{m}$$

- Gráfico do Deslocamento:



$$x_{máx} = 0{,}25\,\text{m}$$

EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

Solução do Exemplo

- C) Módulo da Velocidade e Aceleração Máxima:
- Derivando a equação do deslocamento, obtém-se a equação da velocidade:

$$\dot{x}_0 = 0{,}25 \cdot \cos(0{,}849 \cdot t) \cdot \frac{d}{dt}$$

- A partir das regras de derivada, tem-se que:

$$\cos(\omega_n \cdot t) \cdot \frac{d}{dt} = -\omega_n \cdot \operatorname{sen}(\omega_n \cdot t)$$

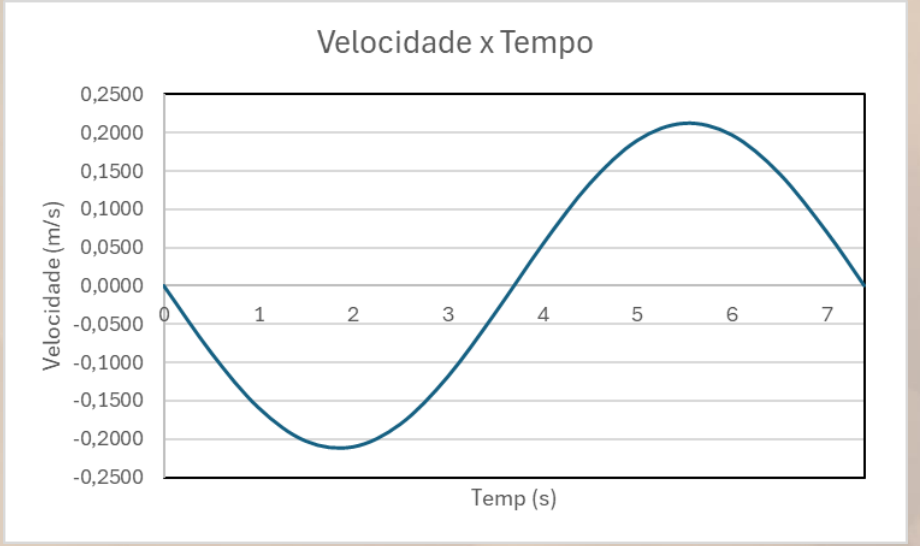
- Portanto:

$$\dot{x}_0 = -0{,}25 \cdot [-\omega_n \cdot \operatorname{sen}(\omega_n \cdot t)]$$

$$\dot{x}_0 = -0{,}25 \cdot [-0{,}849 \cdot \operatorname{sen}(0{,}849 \cdot t)]$$

$$\dot{x}_0 = -0{,}21225 \cdot \operatorname{sen}(0{,}849 \cdot t)\ \text{m/s}$$

- Gráfico da Velocidade:



$$\dot{x}_{máx} = 0{,}21225\,\text{m/s}$$

EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

Solução do Exemplo

- Derivando a equação da velocidade, obtém-se a equação da aceleração:

$$\ddot{x}_0 = -0{,}21225 \cdot \text{sen}(0{,}849 \cdot t) \cdot \frac{d}{dt}$$

- A partir das regras de derivada, tem-se que:

$$\text{sen}(\omega_n \cdot t) \cdot \frac{d}{dt} = \omega_n \cdot \cos(\omega_n \cdot t)$$

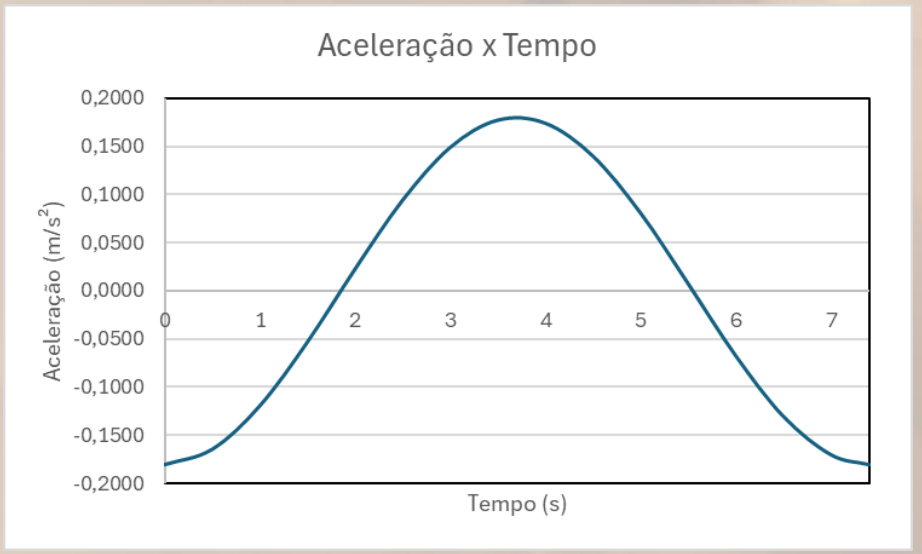
- Portanto:

$$\ddot{x}_0 = -0{,}21225 \cdot [\omega_n \cdot \cos(\omega_n \cdot t)]$$

$$\ddot{x}_0 = -0{,}21225 \cdot [0{,}849 \cdot \cos(0{,}849 \cdot t)]$$

$$\ddot{x}_0 = -0{,}1802 \cdot \cos(0{,}849 \cdot t)\ \text{m/s}^2$$

- Gráfico da Aceleração:

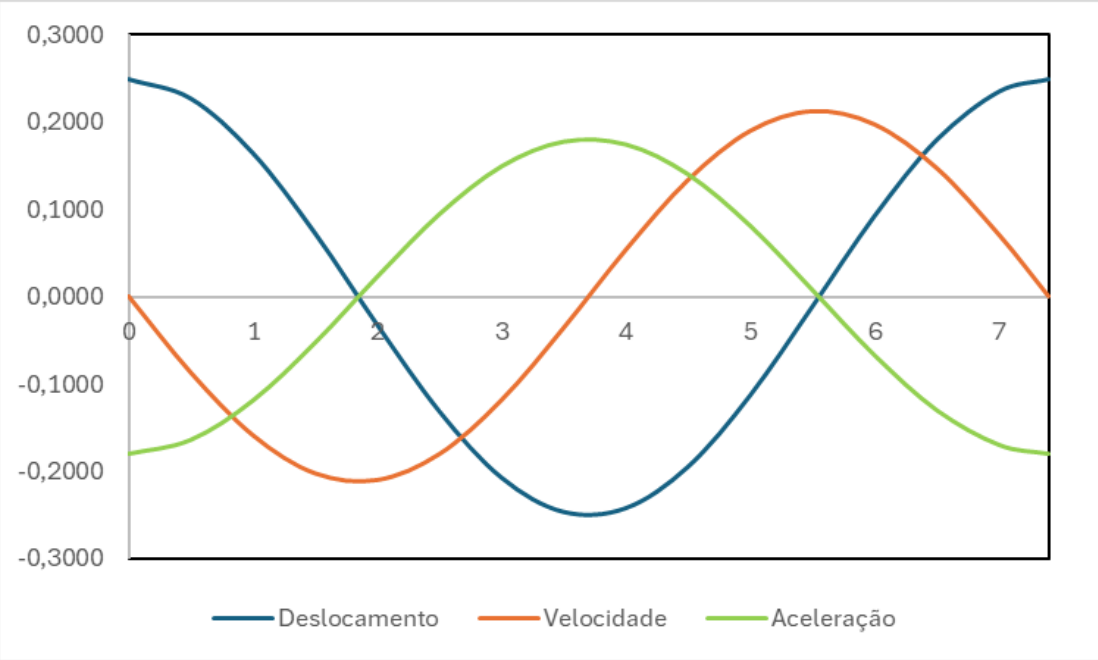


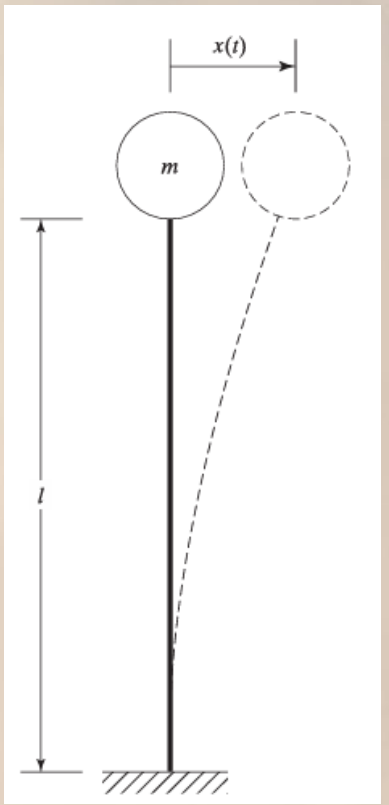
$$\ddot{x}_{máx} = 0{,}1802\ \text{m/s}^2$$

EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

Solução do Exemplo

Gráficos Sobrepostos:





Análise dos Gráficos:

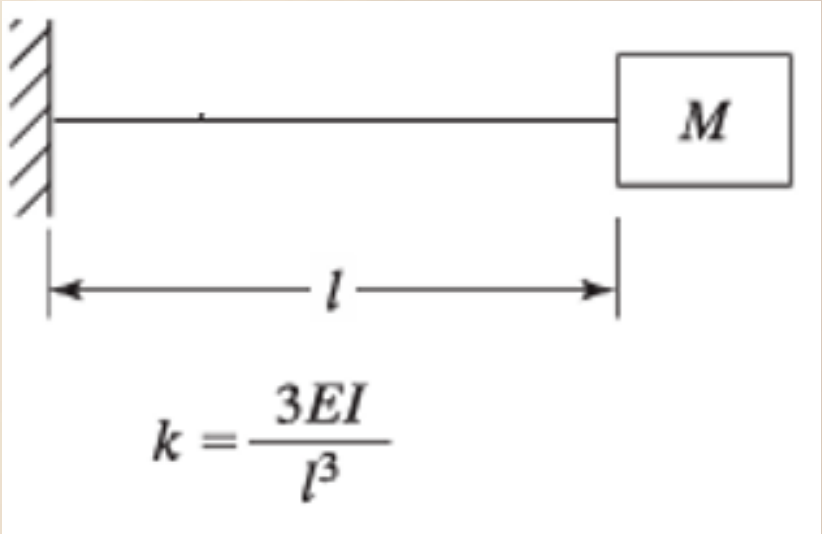
1. Nos instantes de máxima amplitude do movimento, a velocidade é igual a zero e a aceleração é máxima.

2. Nos instantes de amplitude igual a zero (eixo central do movimento vibratório), a velocidade é máxima e a aceleração é igual a zero.

EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

Exemplo de Aplicação

- Uma viga em balanço suporta uma massa M em sua extremidade livre como mostrado na imagem. Considere que uma massa m cai de uma altura h sobre a massa M e adere a ela sem ricochetear. Determine a equação que define a vibração transversal resultante da viga.



$$k = \frac{3EI}{l^3}$$

EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

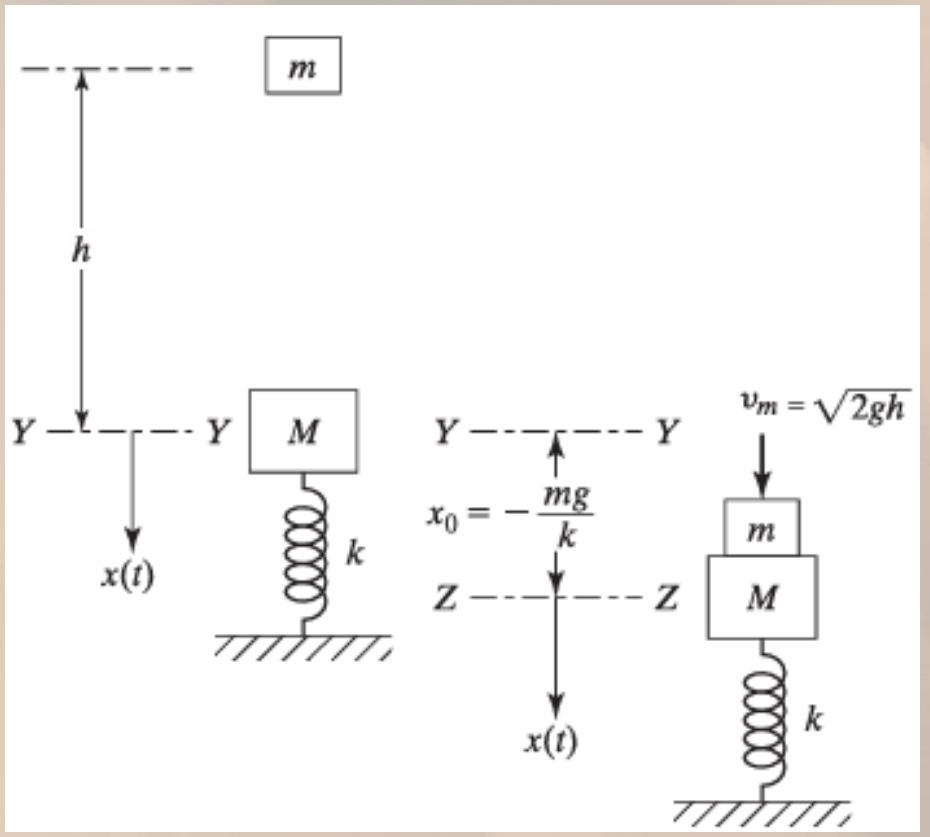
Solução do Exemplo

- Quando a massa *m* cai de uma altura *h*, ela atinge a massa *M* com uma velocidade de queda livre dada por $v_m = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$. Como a massa *m* adere à massa *M* sem ricochetear, a velocidade da massa combinada (*M*+*m*) imediatamente após o impacto $\dot{x}_0$ pode ser determinada utilizando o princípio da quantidade de movimento.

$$m \cdot v_m = (M + m) \cdot \dot{x}_0$$

$$\dot{x}_0 = \left(\frac{m}{M + m}\right) \cdot v_m$$

$$\dot{x}_0 = \left(\frac{m}{M + m}\right) \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$



EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

Solução do Exemplo

- A posição de equilíbrio estático da viga com a nova massa (*M*+*m*) está localizada a uma distância de $m \cdot g/k$ abaixo da posição de equilíbrio da massa original *M*. Para essa situação, a rigidez da viga em balanço é dada por:

$$k = \frac{3 \cdot E \cdot I}{l^3}$$

- Como a vibração livre da viga com a nova massa (M+m), ocorre em relação a sua posição de equilíbrio original, as condições de contorno iniciais do problema são dadas por:

$$x_0 = -\frac{m \cdot g}{l^3} \qquad \dot{x}_0 = \left(\frac{m}{M+m}\right) \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

- Assim, a equação geral simplificada para a vibração transversal livre resultante pode ser expressa da seguinte forma:

$$x = C \cdot \operatorname{sen}(\omega_n \cdot t + \emptyset)$$

- A amplitude é dada por:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$A = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} = \frac{\left(\frac{m}{M+m}\right) \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}}{\omega_n}$$

$$B = x_0 = -\frac{m \cdot g}{l^3}$$

EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

Solução do Exemplo

Portanto:

$$C = \sqrt{\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2 + {x_0}^2}$$

$$C = \sqrt{\left(\frac{\left(\frac{m}{M+m}\right)\cdot\sqrt{2\cdot g\cdot h}}{\omega_n}\right)^2 + \left(-\frac{m\cdot g}{l^3}\right)^2}$$

O ângulo de fase é dado por:

$$\emptyset = \tan^{-1}\frac{B}{A} \quad \Rightarrow \quad \emptyset = \tan^{-1}\frac{x_0}{\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}}$$

$$\emptyset = \tan^{-1}\frac{x_0\cdot\omega_n}{\dot{x}_0}$$

$$\emptyset = \tan^{-1}\left[\frac{\left(-\frac{m\cdot g}{l^3}\right)\cdot\omega_n}{\left(\frac{m}{M+m}\right)\cdot\sqrt{2\cdot g\cdot h}}\right]$$

A frequência natural será:

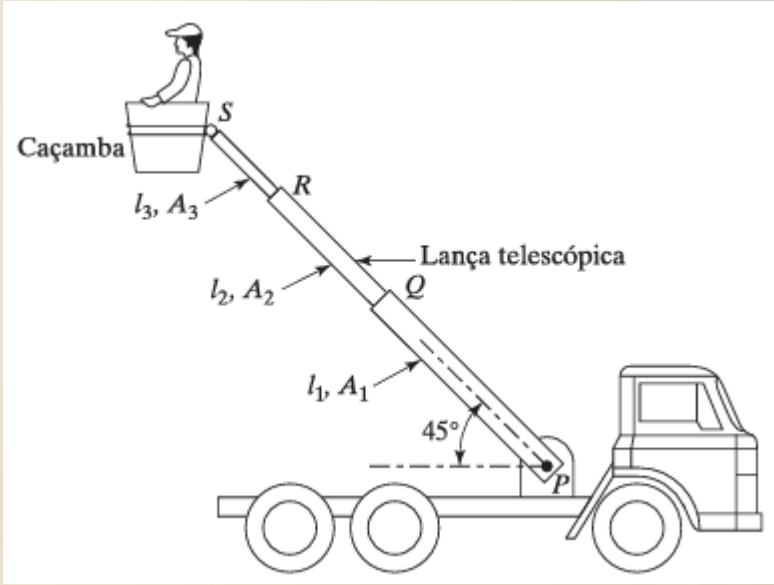
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{(M+m)}}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3\cdot E\cdot I}{l^3\cdot(M+m)}}$$

EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

Exemplo de Aplicação

- A caçamba de um caminhão de bombeiros está localizada na extremidade de uma lança telescópica, como mostrado na figura. A caçamba mais o bombeiro possuem uma massa igual a 200 kg. Determine a frequência natural de vibração da caçamba no sentido vertical. Dados: E = 2,1 x 10^{11} N/m², $l_1 = l_2 = l_3$ = 3 m, A_1 = 20 cm², A_2 = 10 cm² e A_3 = 5 cm².



EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

Solução do Exemplo

- Rigidez Equivalente:

- Como os elementos da lança telescópica do caminhão de bombeiros estão associados em série, a rigidez equivalente pode ser determinada da seguinte forma:

$$\frac{1}{k_b} = \frac{1}{k_{b1}} + \frac{1}{k_{b2}} + \frac{1}{k_{b3}}$$

- Sendo a rigidez de cada trecho da lança calculada por:

$$k_{bi} = \frac{A_i \cdot E_i}{l_i}$$

- Aplicando os valores numéricos fornecidos:

$$k_{b1} = \frac{A_1 \cdot E_1}{l_1} = \frac{(20 \cdot 10^{-4}) \cdot (2{,}1 \cdot 10^{11})}{3}$$

$$k_{b1} = 14 \cdot 10^7 \text{ N/m}$$

$$k_{b2} = \frac{A_2 \cdot E_2}{l_2} = \frac{(10 \cdot 10^{-4}) \cdot (2{,}1 \cdot 10^{11})}{3}$$

$$k_{b2} = 7 \cdot 10^7 \text{ N/m}$$

$$k_{b3} = \frac{A_3 \cdot E_3}{l_3} = \frac{(5 \cdot 10^{-4}) \cdot (2{,}1 \cdot 10^{11})}{3}$$

$$k_{b3} = 3{,}5 \cdot 10^7 \text{ N/m}$$

EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

Solução do Exemplo

- Portanto, a rigidez equivalente do sistema será:

$$\frac{1}{k_b} = \frac{1}{k_{b1}} + \frac{1}{k_{b2}} + \frac{1}{k_{b3}}$$

$$\frac{1}{k_b} = \frac{1}{14 \cdot 10^7} + \frac{1}{7 \cdot 10^7} + \frac{1}{3{,}5 \cdot 10^7}$$

$$\frac{1}{k_b} = \left(\frac{1}{14} + \frac{1}{7} + \frac{1}{3{,}5}\right) \cdot \frac{1}{10^7}$$

$$\frac{1}{k_b} = \left(\frac{1+2+4}{14}\right) \cdot \frac{1}{10^7}$$

$$\frac{1}{k_b} = \left(\frac{7}{14}\right) \cdot \frac{1}{10^7} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k_b} = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{10^7}$$

$$\frac{1}{k_b} = \frac{1}{2 \cdot 10^7} \quad \Rightarrow \quad k_b = 2 \cdot 10^7 \text{ N/m}$$

- A rigidez da lança telescópica no sentido vertical será dada por:

$$k = k_b \cdot \cos 45° \quad \Rightarrow \quad k = 2 \cdot 10^7 \cdot \cos 45°$$

$$k = 2 \cdot 10^7 \cdot 0{,}707 \quad \Rightarrow \quad k = 1{,}414 \cdot 10^7 \text{ N/m}$$

- A frequência natural de vibração da caçamba no sentido vertical será:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{1{,}414 \cdot 10^7}{200}}$$

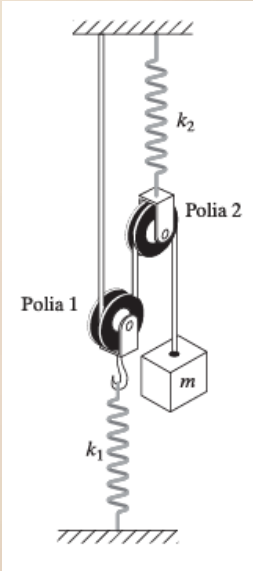
$$\omega_n = 265{,}89 \text{ rad/s}$$

EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

Exercícios Propostos

1. Uma viga simplesmente apoiada com seção transversal quadrada de 5 mm e comprimento de 1 m suporta uma massa de 2,3 kg em seu ponto médio e possui uma frequência natural de vibração transversal de 30 rad/s. Determine o módulo de elasticidade da viga.

2. Determine a frequência natural de vibração do sistema mostrado na figura. Admita que as polias não tenham atrito e que a massa seja desprezível.



EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

Obrigado Pela Atenção

Nos Encontramos na Próxima Aula

EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA