



Vibrações Mecânicas

Prof. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues



Aula - 7

Vibração Livre não Amortecida



Conteúdos Abordados Nessa Aula

Aula 7

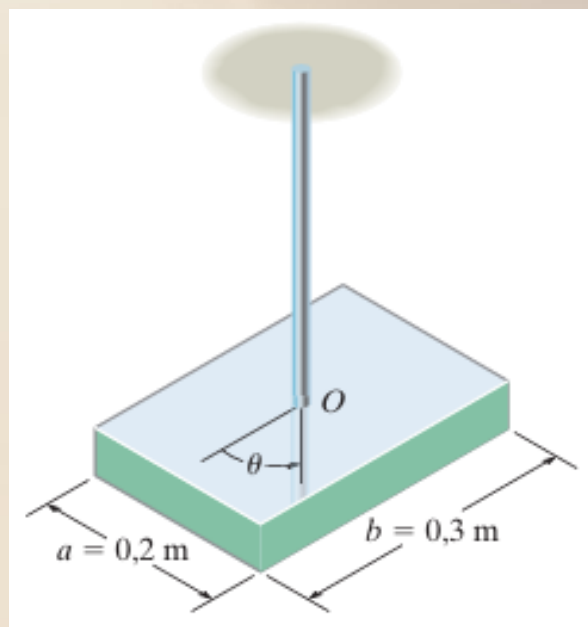
-  Vibração Livre não Amortecida;
-  Sistema Massa-Mola
-  Sistemas com Um Grau de Liberdade;
-  Solução de Exercícios.



Exemplo de Aplicação

Aula 7

- ☉ A placa retangular de 10 kg mostrada na figura está suspensa em seu centro por uma barra de rigidez torcional $k = 1,5 \text{ Nm/rad}$. Determine o período natural de vibração da placa quando aplica-se um pequeno deslocamento angular θ em seu próprio plano.



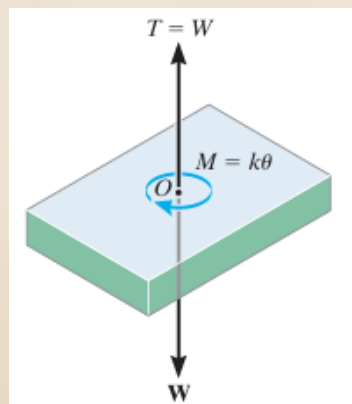
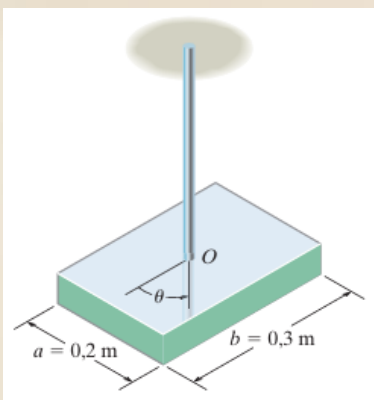


Solução do Exemplo

Aula 7

Diagrama de Corpo Livre:

-  Como a placa é deslocada em seu próprio plano, o momento torcional restaurador criado pela barra tem intensidade $M = k \cdot \theta$. Esse momento age no sentido oposto ao do deslocamento angular θ . O sentido convencionado para a aceleração angular $\ddot{\theta}$ é o de θ positivo.



Equação de Movimento:

$$\sum M_O = I_O \cdot \alpha \quad \longrightarrow \quad -k \cdot \theta = I_O \cdot \ddot{\theta}$$

$$-\frac{k}{I_O} \cdot \theta = \ddot{\theta} \quad \longrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{k}{I_O} \cdot \theta = 0$$

-  Como essa equação está na forma-padrão, pode-se escrever que:

$$\ddot{\theta} + \omega_n^2 \cdot \theta = 0$$

 Portanto:

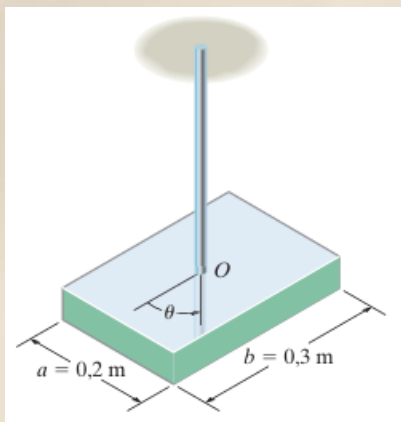
$$\omega_n^2 = \frac{k}{I_O} \quad \longrightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{I_O}}$$



Solução do Exemplo

Aula 7

🌐 O momento de inércia da placa em relação ao eixo coincidente com a barra é dado por:



$$I_O = \frac{1}{12} \cdot m \cdot (a^2 + b^2)$$

$$I_O = \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot (0,2^2 + 0,3^2)$$

$$I_O = 0,108 \text{ kg m}^2$$

🌐 O Período é dado por:

$$\tau = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_n} \quad \rightarrow \quad \tau = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{\frac{k}{I_O}}}$$

$$\tau = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I_O}{k}}$$

$$\tau = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{0,108}{1,5}}$$

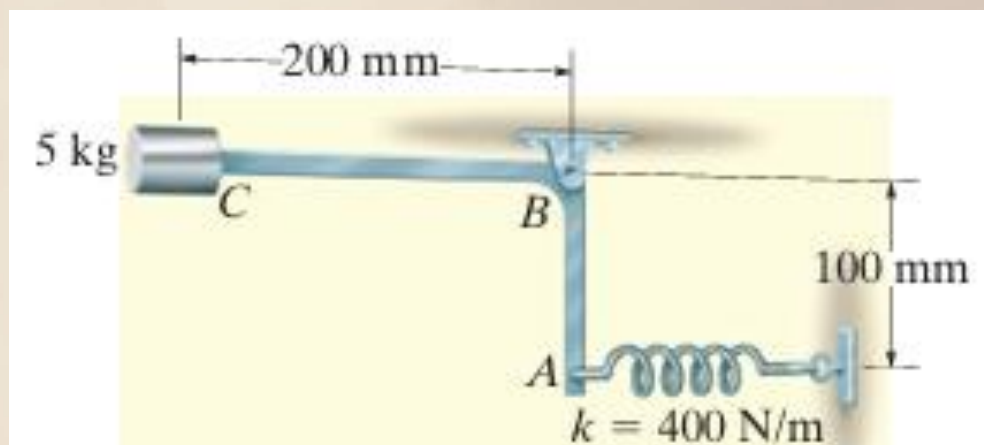
$$\tau = 1,69 \text{ s}$$



Exemplo de Aplicação

Aula 7

- ☉ A barra curva mostrada na figura tem massa desprezível e suporta um cursor de 5 kg em sua extremidade. Determine o período natural de vibração para o sistema.





Solução do Exemplo

Aula 7

Diagramas de Corpo Livre e Dinâmico:

- Desloca-se a barra em um pequeno ângulo θ em relação à sua posição de equilíbrio.

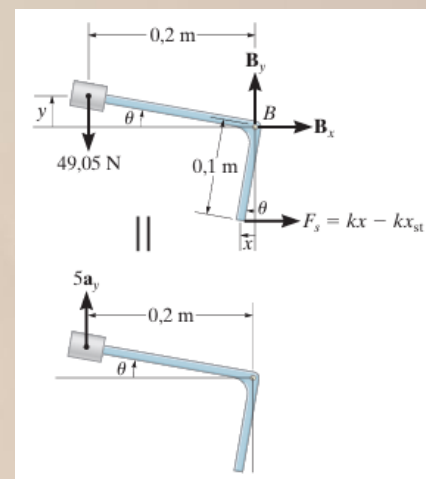
Como a mola apresenta uma compressão inicial x_{st} para satisfazer a condição de equilíbrio, quando o deslocamento $x > x_{st}$ a mola exerce na barra uma força:

$$F_s = k \cdot x - k \cdot x_{st}$$

- Para obter a forma-padrão, $5 \cdot a_y$ deve atuar para cima, estando de acordo com o deslocamento positivo θ .

Equação de Movimento:

- Os momentos serão somados em relação ao ponto B a fim de se eliminar a reação desconhecida nesse ponto. Considerando que θ é pequeno, pode-se escrever que:



$$\sum M_B = \sum (\mu_k)_B$$

$$k \cdot x \cdot 0,1 - k \cdot x_{st} \cdot 0,1 + 49,05 \cdot 0,2 = -5 \cdot a_y \cdot 0,2$$



Solução do Exemplo

Aula 7

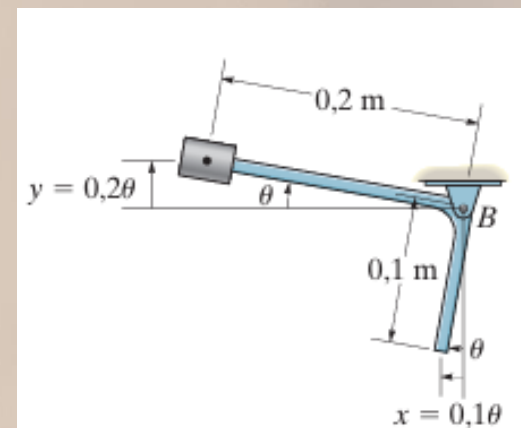
- 🌐 O segundo termo no primeiro membro dessa equação, $-k \cdot x_{st} \cdot 0,1$, representa o momento criado pela força da mola necessária para manter o cursor em equilíbrio, isto é, em $x = 0$. Esse momento tem a mesma intensidade do momento $49,05 \cdot 0,2$ criado pelo peso do cursor, de forma que esses dois momentos se cancelam por terem sentidos opostos. Assim, a equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$k \cdot x \cdot 0,1 - k \cdot x_{st} \cdot 0,1 + 49,05 \cdot 0,2 = -5 \cdot a_y \cdot 0,2$$

$$k \cdot x \cdot 0,1 = -5 \cdot a_y \cdot 0,2$$

🌐 Cinemática:

- 🌐 As posições da mola e do cursor podem ser relacionadas com o ângulo θ . Uma vez que θ é pequeno, $x = 0,1 \cdot \theta$ e $y = 0,2 \cdot \theta$. Portanto, $a_y = \ddot{y} = 0,2 \cdot \ddot{\theta}$. Substituindo esses resultados na equação anterior, temos:



$$400 \cdot (0,1 \cdot \theta) \cdot 0,1 = -5 \cdot (0,2 \cdot \ddot{\theta}) \cdot 0,2$$



Solução do Exemplo

Aula 7

- 🌐 A equação obtida pode ser reescrita na forma padrão da seguinte maneira:

$$400 \cdot (0,1 \cdot \theta) \cdot 0,1 = -5 \cdot (0,2 \cdot \ddot{\theta}) \cdot 0,2$$

$$4 \cdot \theta = -0,2 \cdot \ddot{\theta}$$

$$-\frac{4}{0,2} \cdot \theta = \ddot{\theta}$$

$$-20 \cdot \theta = \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + 20 \cdot \theta = 0$$

- 🌐 Por comparação, verifica-se que a equação obtida possui a forma padrão:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 \cdot x = 0$$

- 🌐 Portanto, a frequência natural de oscilação do sistema é:

$$\omega_n^2 = 20 \longrightarrow \omega_n = \sqrt{20} \longrightarrow \omega_n = 4,47 \text{ rad/s}$$

- 🌐 O Período é dado por:

$$\tau = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_n} \longrightarrow \tau = \frac{2 \cdot \pi}{4,47}$$

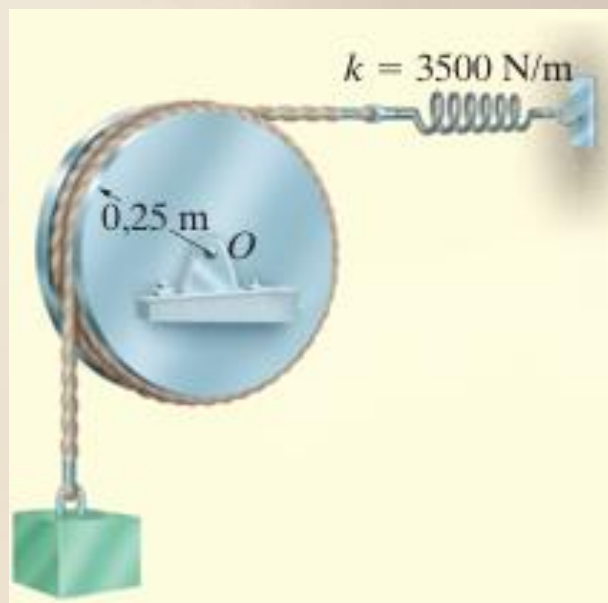
$$\tau = 1,40 \text{ s}$$



Exemplo de Aplicação

Aula 7

- Um bloco de 5 kg está suspenso por uma corda que passa sobre um disco de 7,5 kg, como mostra a figura. A mola tem rigidez $k = 3500$ N/m. Determine o período natural de vibração para o sistema.





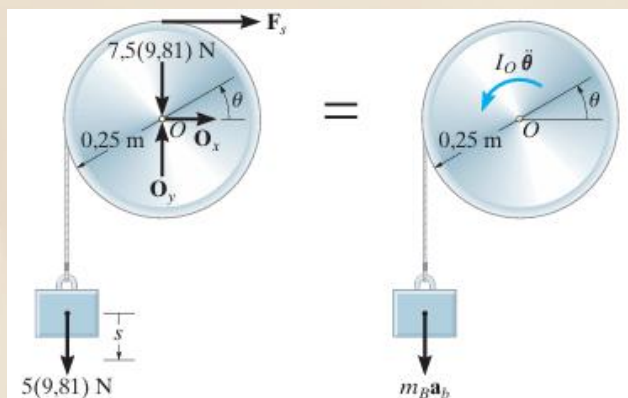
Solução do Exemplo

Aula 7

Diagramas de Corpo Livre e Dinâmico:

- O sistema consiste no disco, que sofre uma rotação definida pelo ângulo θ , e o bloco, que se translada de s .

O vetor $I_O \cdot \ddot{\theta}$ tem o sentido correspondente a θ positivo e, conseqüentemente, $m_B \cdot a_b$ tem o sentido (para baixo) correspondente a s positivo.



Equação de Movimento:

- Somando os momentos em relação ao ponto O para eliminar as reações O_x e O_y , e considerando para o disco que $I_O = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$, pode-se escrever que:

$$\sum M_O = \sum (\mu_k)_O$$

$$5 \cdot 9,81 \cdot 0,25 - F_s \cdot 0,25 = I_O \cdot \ddot{\theta} + 5 \cdot a_b \cdot 0,25$$

$$5 \cdot 9,81 \cdot 0,25 - F_s \cdot 0,25 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot \ddot{\theta} + 5 \cdot a_b \cdot 0,25$$

$$5 \cdot 9,81 \cdot 0,25 - F_s \cdot 0,25 = \frac{1}{2} \cdot 7,5 \cdot 0,25^2 \cdot \ddot{\theta} + 5 \cdot a_b \cdot 0,25$$

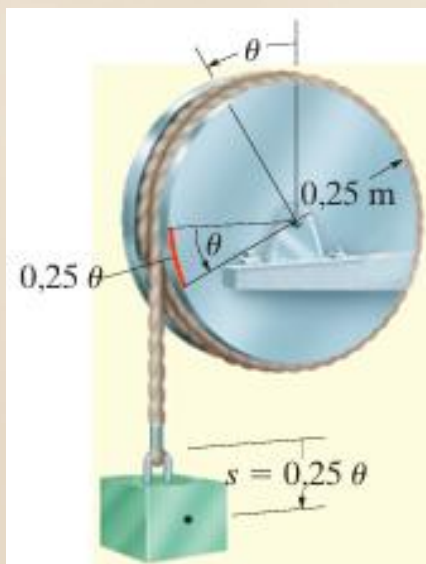


Solução do Exemplo

Aula 7

Cinemática:

-  Como mostra o diagrama cinemático na figura, um pequeno deslocamento positivo θ do disco corresponde um deslocamento do bloco para baixo $s = 0,25 \cdot \theta$; logo, $a_b = \ddot{s} = 0,25 \cdot \ddot{\theta}$.



-  Quando $\theta = 0^\circ$, a força da mola necessária ao equilíbrio do disco tem uma intensidade de $5 \cdot 9,81 = 49,05$ N e age para a direita. Para a posição θ , a força da mola é $F_s = 3500 \cdot 0,25 \cdot \theta + 5 \cdot 9,81$ N. Substituindo esses resultados na equação anterior, obtemos:

$$5 \cdot 9,81 \cdot 0,25 - F_s \cdot 0,25 = \frac{1}{2} \cdot 7,5 \cdot 0,25^2 \cdot \ddot{\theta} + 5 \cdot a_b \cdot 0,25$$

$$12,26 - F_s \cdot 0,25 = 0,2344 \cdot \ddot{\theta} + 1,25 \cdot a_b$$

$$12,26 - (875 \cdot \theta + 49,05) \cdot 0,25 = 0,2344 \cdot \ddot{\theta} + 1,25 \cdot a_b$$

$$12,26 - 218,75 \cdot \theta - 12,26 = 0,2344 \cdot \ddot{\theta} + 1,25 \cdot 0,25 \cdot \ddot{\theta}$$

$$-218,75 \cdot \theta = 0,2344 \cdot \ddot{\theta} + 0,3125 \cdot \ddot{\theta}$$



Solução do Exemplo

Aula 7

- 🌐 A equação obtida pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$-218,75 \cdot \theta = 0,5469 \cdot \ddot{\theta}$$

$$-\frac{218,75}{0,5469} \cdot \theta = \ddot{\theta}$$

$$-400 \cdot \theta = \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + 400 \cdot \theta = 0$$

- 🌐 Por comparação, verifica-se que a equação obtida possui a forma padrão:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 \cdot x = 0$$

- 🌐 Portanto, a frequência natural de oscilação do sistema é:

$$\omega_n^2 = 400 \quad \longrightarrow \quad \omega_n = \sqrt{400} \quad \longrightarrow \quad \omega_n = 20 \text{ rad/s}$$

- 🌐 O Período é dado por:

$$\tau = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_n} \quad \longrightarrow \quad \tau = \frac{2 \cdot \pi}{20}$$

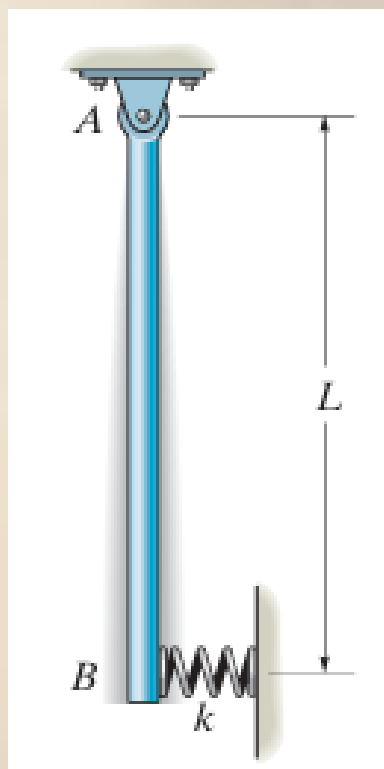
$$\tau = 0,314 \text{ s}$$



Exercícios Propostos

Aula 7

1. A barra uniforme de massa m é apoiada por um pino em A e uma mola em B . Se B recebe um pequeno deslocamento de lado e é solto, determine o período natural de vibração.

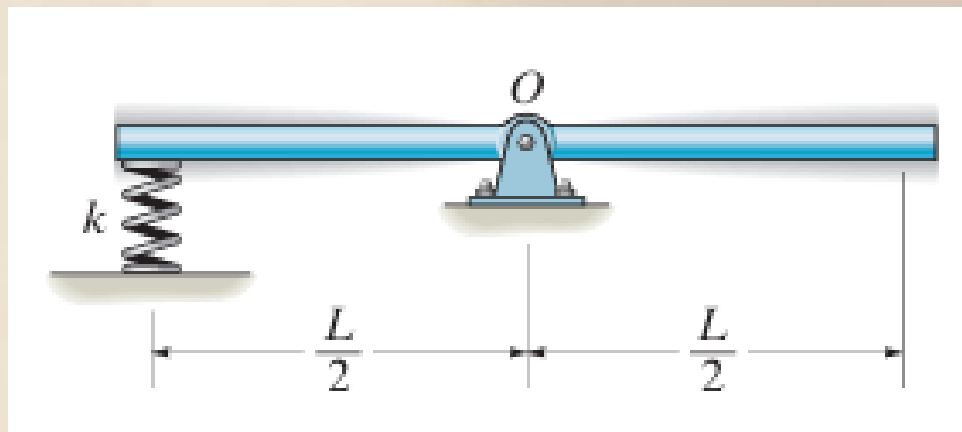




Exercícios Propostos

Aula 7

2. Determine o período natural de vibração da barra uniforme de massa m quando ela é deslocada ligeiramente para baixo e solta.

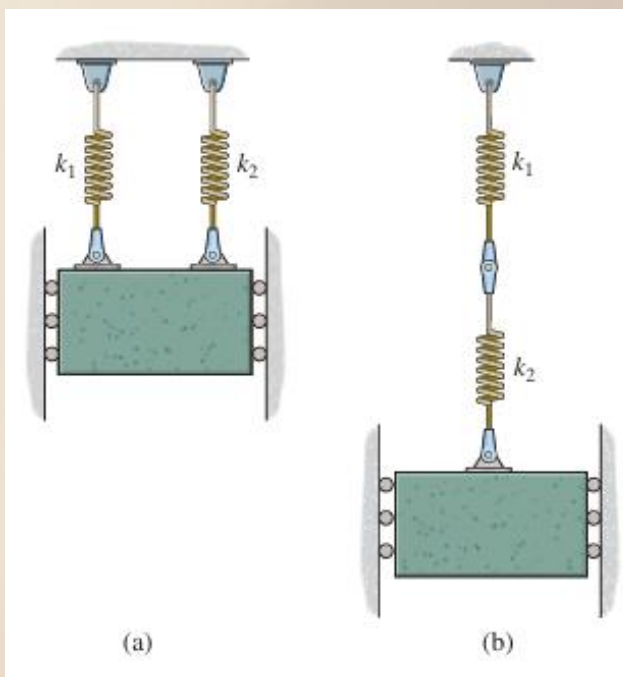




Exercícios Propostos

Aula 7

3. O bloco de 15 kg é suspenso por duas molas com diferentes rigidezes e arrumadas (a) em paralelo uma à outra e (b) em série. Se os períodos naturais de oscilação do sistema paralelo e do sistema em série forem observados como sendo 0,5 s e 1,5 s, respectivamente, determine as rigidezes k_1 e k_2 das molas.

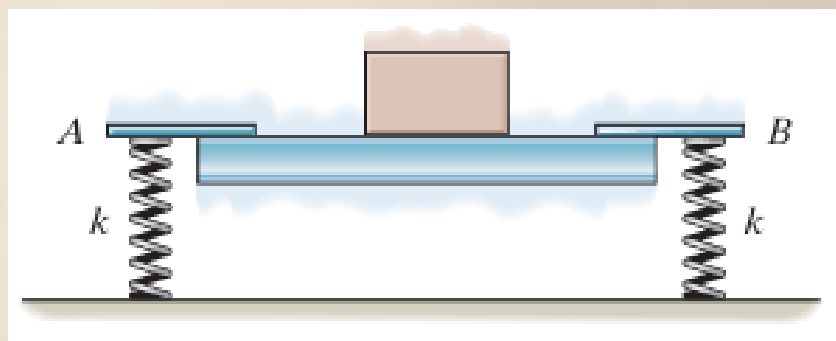




Exercícios Propostos

Aula 7

4. Uma barra uniforme é suportada em suas duas extremidades pelas molas A e B , cada uma com uma rigidez k . O período de vibração vertical da barra quando nada se apoia nela é de $0,83$ s. Seu período se altera para $1,52$ s, quando se coloca sobre seu centro uma massa de 50 kg. Calcule a rigidez de cada mola e a massa da barra.

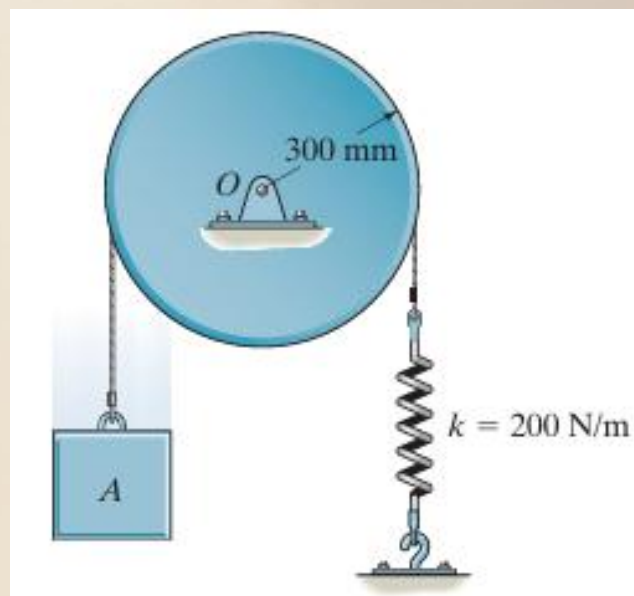




Exercícios Propostos

Aula 7

5. O disco de 20 kg é preso por um pino em seu centro de massa O e apoia o bloco A de 4 kg. Se a correia que passa em volta do disco não desliza em sua superfície de contato, determine o período natural de vibração do sistema.



Obrigado Pela Atenção

Nos Encontramos na Próxima Aula

