EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

Vibrações Mecânicas

Prof. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues

EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

Aula - 6

Vibração Livre não Amortecida em Sistemas com Um Grau de Liberdade

Conteúdos Abordados Nessa Aula

- Vibração Livre não Amortecida;
- Sistema Massa-Mola
- Sistemas com Um Grau de Liberdade;
- Equações de Movimento.

Definição de Vibração

- Vibração é todo movimento periódico de um corpo ou sistema de corpos interligados, em torno de uma posição de equilíbrio.

- Em geral, há dois tipos de vibração, livre e forçada.

- A vibração livre ocorre quando o movimento se mantém por forças restauradoras gravitacionais ou elásticas, como, por exemplo, O movimento de vai-e-vem de um pêndulo ou a vibração de uma barra elástica.

- Uma vibração forçada é causada por uma força externa periódica ou intermitente aplicada ao sistema.

- Ambos os tipos de vibração podem ser amortecidos ou não.

Vibração Livre Não Amortecida

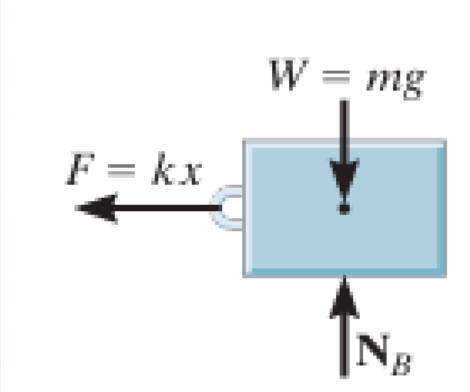
- O tipo mais simples de movimento de vibração é o de vibração livre sem amortecimento representado pelo modelo mostrado na figura.

- O bloco tem massa *m* e está ligado a uma mola de rigidez *k*. Um movimento de vibração ocorre quando o bloco é solto após ter sido deslocado para uma posição *x*, de modo que a mola, por estar deformada, puxa-o de volta.

- O bloco atingirá uma velocidade tal que será capaz de ultrapassar a posição de equilíbrio *x* = 0, portanto o movimento adquirido, que será oscilatório, continuará indefinidamente, caso se considerem nulas as forças de atrito, como, por exemplo, no caso de uma superfície de apoio lisa.

- O movimento dependente do tempo pode ser determinado aplicando-se a equação de movimento ao bloco considerado numa posição genérica *x*.

- A figura mostra o diagrama de corpo livre. A força elástica restauradora, de intensidade $F = k \cdot x$, está sempre voltada para a posição de equilíbrio, enquanto a aceleração *a* é tomada genericamente com sentido positivo concordante com o do deslocamento. Ao observar que $a = d^2x/dt^2 = \ddot{x}$, temos:



$$\sum F_x = m \cdot a_x$$

$$-k \cdot x = m \cdot \ddot{x}$$

- Observando que a aceleração é proporcional ao deslocamento do bloco. O movimento assim descrito é denominado movimento harmônico simples.

- Após rearranjo, a equação anterior pode ser posta na “forma-padrão”:

$$-k \cdot x = m \cdot \ddot{x} \quad \rightarrow \quad -\frac{k}{m} \cdot x = \ddot{x} \quad \rightarrow \quad \ddot{x} - \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

- Conforme apresentado anteriormente, a frequência natural é dada por:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

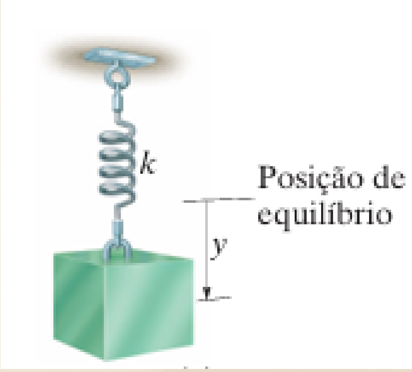
- Portanto, pode-se escrever que:

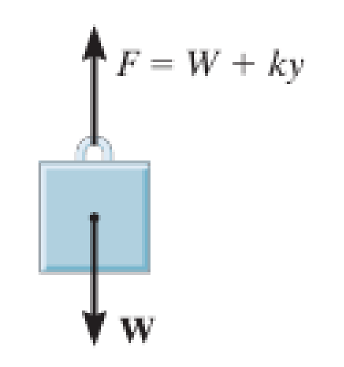
$$\ddot{x} - \omega_n^2 \cdot x = 0$$

Modelagem Matemática – Sistema Vertical

- A equação padrão também pode ser obtida considerando-se o bloco suspenso e medindo-se o deslocamento *y* a partir da sua posição de equilíbrio.

- Quando o bloco está em equilíbrio, a mola exerce nele uma força para cima de intensidade $F = W = m \cdot g$. Logo, quando o bloco é deslocado de uma distância *y* para baixo dessa posição, a intensidade da força da mola passa a ser $F = W + k \cdot y$. A aplicação da equação de movimento resulta em:





$$\sum F_y = m \cdot a_y$$

$$-W - k \cdot y + W = m \cdot \ddot{y} \quad \longrightarrow \quad -k \cdot y = m \cdot \ddot{y}$$

- Portanto, pode-se escrever que:

$$\ddot{y} - \omega_n^2 \cdot y = 0$$

Frequência Natural de Vibração

- A frequência natural de vibração é uma característica intrínseca de um sistema mecânico que define a taxa na qual ele tende a oscilar quando é perturbado de sua posição de equilíbrio e não sofre influência de forças externas contínuas.

- Fisicamente, ela representa o número de oscilações completas que o sistema realiza por unidade de tempo em resposta a uma pequena perturbação, sendo determinada exclusivamente pelas propriedades inerciais e elásticas do conjunto, como a massa e a rigidez.

- Quando um corpo é deslocado de sua posição de repouso e liberado, a energia potencial armazenada em seus elementos elásticos, como molas, converte-se em energia cinética associada ao movimento da massa, e esse processo de troca de energia ocorre em um ritmo específico, que é a frequência natural.

Frequência Natural de Vibração

- Essa frequência pode ser única para sistemas simples, como um oscilador massa-mola ideal, ou múltipla no caso de sistemas mais complexos, que possuem diversos modos de vibração.

- Na prática, conhecer a frequência natural é fundamental, pois quando o sistema é excitado por forças externas cuja frequência se aproxima desse valor, ocorre o fenômeno da ressonância, que pode amplificar drasticamente a amplitude das oscilações e causar falhas estruturais.

- Assim, a frequência natural não é apenas um parâmetro teórico, mas um aspecto físico fundamental que governa o comportamento dinâmico e a segurança de máquinas, estruturas e componentes mecânicos.

Solução da Equação Padrão

- A equação padrão é uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem, com coeficientes constantes. Portanto, a solução geral desse tipo de equação é dada por:

$$x = A \cdot \operatorname{sen} \omega_n \cdot t + B \cdot \cos \omega_n \cdot t$$

- *A* e *B* são duas constantes de integração arbitrárias. A velocidade e a aceleração do bloco são determinadas por derivações temporais sucessivas, o que resulta em:

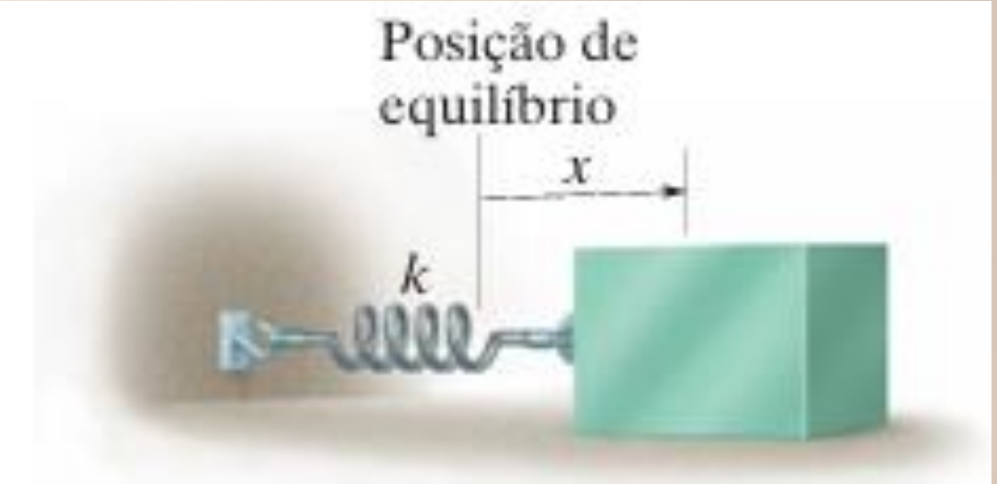
$$v = \dot{x} = A \cdot \omega_n \cdot \cos \omega_n \cdot t - B \cdot \omega_n \cdot \operatorname{sen} \omega_n \cdot t$$

$$a = \ddot{x} = -A \cdot \omega_n^2 \cdot \operatorname{sen} \omega_n \cdot t - B \cdot \omega_n^2 \cdot \cos \omega_n \cdot t$$

- Verifica-se facilmente que quando as equações acima são substituídas na equação padrão, a equação diferencial é, de fato, satisfeita, mostrando que essas equações representam a solução da equação padrão.

Determinação das Constantes *A* e *B*

- As constantes arbitrárias A e B podem ser determinadas pelas condições iniciais do problema. Por exemplo, suponha que o bloco na figura tenha sido deslocado de uma distância x_1 para a direita de sua posição de equilíbrio e recebeu uma velocidade inicial v_1 para direita (v_1 positiva).



Determinação das Constantes *A* e *B*

Substituindo na equação do deslocamento $x = x_1$ para $t = 0$, obtemos $B = x_1$:

$$x = A \cdot \operatorname{sen} \omega_n \cdot t + B \cdot \cos \omega_n \cdot t \rightarrow x_1 = A \cdot \operatorname{sen} \omega_n \cdot 0 + B \cdot \cos \omega_n \cdot 0$$

$$x_1 = A \cdot \operatorname{sen} 0 + B \cdot \cos 0 \rightarrow x_1 = A \cdot 0 + B \cdot 1 \rightarrow B = x_1$$

Como $v = v_1$ para $t = 0$, então, aplicando na equação da velocidade, chegamos a $A = v_1/\omega_n$:

$$v = \dot{x} = A \cdot \omega_n \cdot \cos \omega_n \cdot t - B \cdot \omega_n \cdot \operatorname{sen} \omega_n \cdot t \rightarrow v_1 = A \cdot \omega_n \cdot \cos \omega_n \cdot 0 - x_1 \cdot \omega_n \cdot \operatorname{sen} \omega_n \cdot 0$$

$$v_1 = A \cdot \omega_n \cdot \cos 0 - x_1 \cdot \omega_n \cdot \operatorname{sen} 0 \rightarrow v_1 = A \cdot \omega_n \cdot 1 - x_1 \cdot \omega_n \cdot 0 \rightarrow v_1 = A \cdot \omega_n \rightarrow A = \frac{v_1}{\omega_n}$$

Com os valores de *A* e *B* determinados, a equação geral que descreve o movimento se torna:

$$x = A \cdot \operatorname{sen} \omega_n \cdot t + B \cdot \cos \omega_n \cdot t \rightarrow x = \frac{v_1}{\omega_n} \cdot \operatorname{sen} \omega_n \cdot t + x_1 \cdot \cos \omega_n \cdot t$$

Forma Simplificada da Equação Geral

- A equação geral também pode ser expressa de forma mais simples em termos de uma função seno. Para isso, considera-se $A = C \cdot \cos\emptyset$ e $B = C \cdot \operatorname{sen}\emptyset$, onde C e $\emptyset$ são duas novas constantes arbitrárias a serem determinadas no lugar de A e B. Substituindo essas expressões na equação do deslocamento, temos:

$$x = A \cdot \operatorname{sen}\omega_n \cdot t + B \cdot \cos\omega_n \cdot t$$

$$x = C \cdot \cos\emptyset \cdot \operatorname{sen}\omega_n \cdot t + C \cdot \operatorname{sen}\emptyset \cdot \cos\omega_n \cdot t$$

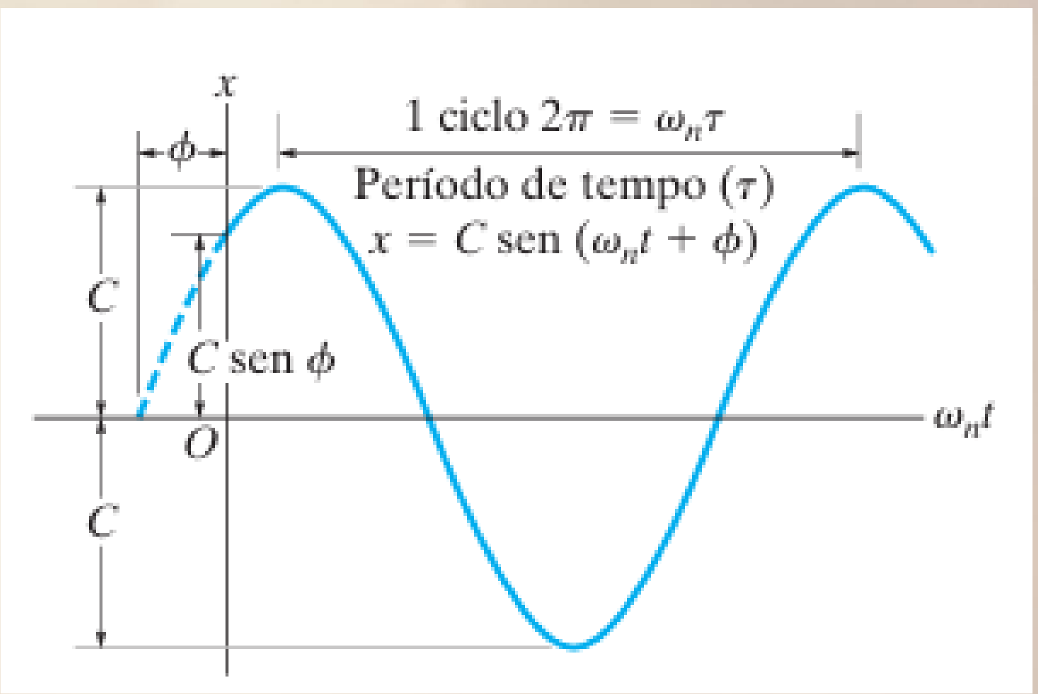
- Usando a identidade trigonométrica $\sin(\theta + \emptyset) = \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\emptyset + \cos\theta \cdot \operatorname{sen}\emptyset$, e considerando que $\theta = \omega_n \cdot t$, pode-se escrever que:

$$x = C \cdot \operatorname{sen}(\omega_n \cdot t + \emptyset)$$

Representação Gráfica

- Um gráfico x versus $\omega_n \cdot t$ para a equação geral pode ser visto na figura.

$$x = C \cdot \text{sen}(\omega_n \cdot t + \emptyset)$$



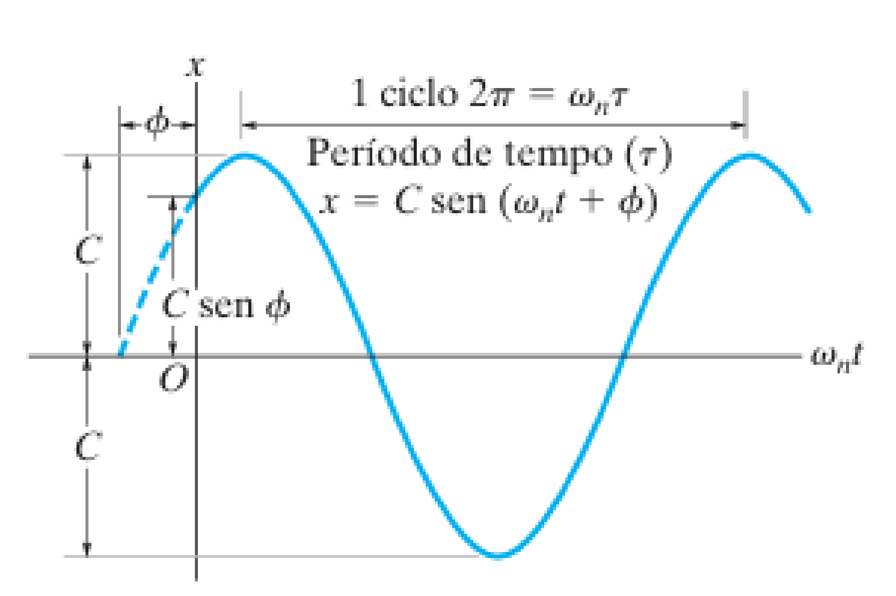
Representação Gráfica

- O deslocamento máximo do bloco relativamente à sua posição de equilíbrio é denominado amplitude da vibração.

- Pode-se ver tanto da figura quanto da equação geral que a amplitude é *C*.

- O ângulo (∅) é chamado de ângulo de fase ou, mais apropriadamente, inicial, pois ele representa quanto a curva está deslocada em relação à origem no instante *t* = 0.

- As constantes *C* e ∅ relacionam-se com *A* e *B* por meio das seguintes equações:



$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\emptyset = \tan^{-1}\frac{B}{A}$$

Período e Frequência

- Observe que a curva senoidal completa um ciclo num tempo $t = \tau$ quando $\omega_n \cdot \tau = 2 \cdot \pi$, ou seja:

$$\boxed{\tau = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_n}}$$

- Esse tempo é denominado período, que também pode ser expresso como:

$$\boxed{\tau = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}}$$

- A frequência f é definida como o número de ciclos completos por unidade de tempo, sendo determinada pelo inverso do período, portanto:

$$\boxed{f = \frac{\omega_n}{2 \cdot \pi}} \Rightarrow \boxed{f = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Análise do Movimento

- Quando um corpo ou sistema de corpos interligados sofre um deslocamento inicial a partir de sua posição de equilíbrio e, então, é abandonado, ele passa a vibrar com sua frequência natural.

- Se o corpo tem apenas um grau de liberdade, isto é, se sua posição pode ser especificada completamente por apenas uma coordenada, então o movimento de vibração do corpo terá as mesmas características do movimento harmônico simples do sistema bloco-mola discutido anteriormente.

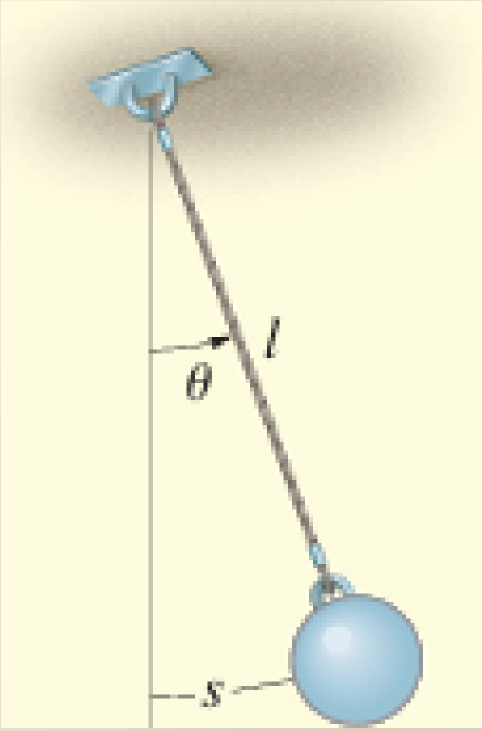
- Consequentemente, o movimento do corpo será descrito por uma equação diferencial com a mesma ‘forma-padrão’, ou seja:

$$\ddot{x} - \omega_n^2 \cdot x = 0$$

- Assim, se a pulsação natural ω_n do corpo for conhecida, o período da vibração τ, a frequência natural f e outras características do movimento de vibração do corpo poderão ser estabelecidos por meio das equações apresentadas.

Exemplo de Aplicação

- Determine o período de vibração para o pêndulo simples mostrado na figura. A esfera tem massa *m* e o fio, comprimento *l*. Despreze o tamanho da esfera e a massa do fio. Considere o fio inextensível.

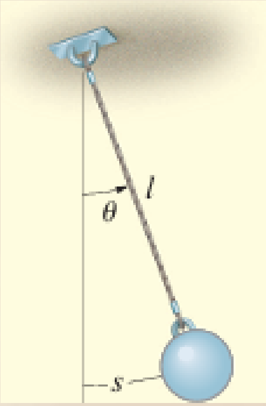


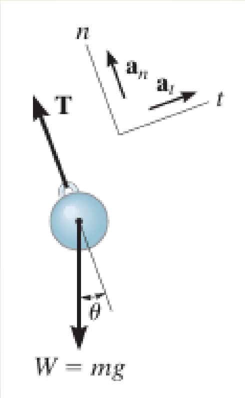
Solução do Exemplo

Aula 6

Diagrama de Corpo Livre:

- O movimento do sistema será descrito por meio da coordenada de posição θ. Quando a esfera está deslocada de um ângulo θ, a força restauradora que age nela é dada pelo componente do peso $m \cdot g \cdot \operatorname{sen} \theta$. Além disso, a aceleração a_t tem o sentido de s (ou θ) crescente.





Equação de Movimento:

- Aplicando a equação de movimento na direção tangencial, pois a força restauradora tem essa direção, obtemos:

$$\sum F_t = m \cdot a_t$$

$$-m \cdot g \cdot \operatorname{sen} \theta = m \cdot a_t \quad \text{(I)}$$

Cinemática:

- Sabe-se que $a_t = d^2s/dt^2 = \ddot{s}$ e que a coordenada s está relacionada com a posição angular θ pela equação $s = l \cdot \theta$, de modo que $a_t = \ddot{s} = l \cdot \ddot{\theta}$.

Solução do Exemplo

Assim, a equação (I) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$-m \cdot g \cdot \operatorname{sen}\theta = m \cdot a_t \Rightarrow -g \cdot \operatorname{sen}\theta = a_t$$

$$-g \cdot \operatorname{sen}\theta = l \cdot \ddot{\theta} \Rightarrow -\frac{g}{l} \cdot \operatorname{sen}\theta = \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \cdot \operatorname{sen}\theta = 0$$

Para pequenos deslocamentos tem-se que $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$, portanto, a equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \cdot \theta = 0$$

Por comparação, verifica-se que a equação obtida possui a forma padrão:

$$\ddot{x} - \omega_n^2 \cdot x = 0$$

Portanto, a frequência natural de oscilação do pêndulo simples é:

$$\omega_n^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

O Período é dado por:

$$\tau = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_n} \Rightarrow \tau = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Esse resultado indica que o período depende somente do comprimento do fio, e não da massa da esfera ou do ângulo θ.

Exercícios Propostos

- 1. Uma mola tem rigidez de 600 N/m. Um bloco de 4 kg é preso à mola, empurrado 50 mm acima da sua posição de equilíbrio e solto a partir do repouso. Determine a equação que descreve o movimento do bloco. Suponha que os deslocamentos positivos sejam medidos para baixo.

- 2. Quando se prende um bloco de 3 kg com uma mola, esta se alonga 60 mm. Determine a frequência natural e o período de vibração para um bloco de 0,2 kg ligado à mola.

- 3. Usa-se uma mola de rigidez k = 80 N/m para suspender um bloco de 8 kg. Se ao bloco for comunicada uma velocidade para cima de 0,4 m/s quando este está 90 mm acima da sua posição de equilíbrio, determine a equação que descreverá o movimento do bloco e seu deslocamento máximo para cima, medido a partir da posição de equilíbrio. Suponha que os deslocamentos positivos sejam medidos para baixo.

Exercícios Propostos

- 4. Considere um bloco de 6 kg suspenso por uma mola de rigidez k = 200 N/m. Comunica-se ao bloco uma velocidade de 0,4 m/s para cima quando este está 75 mm acima da sua posição de equilíbrio. Determine a equação que descreve o movimento do bloco e o seu deslocamento máximo para cima, medido a partir de sua posição de equilíbrio. Suponha que os deslocamentos positivos sejam medidos para baixo.

- 5. Suspende-se um bloco de 3 kg por uma mola de rigidez k = 200 N/m. O peso é empurrado 50 mm para cima, a partir da sua posição de equilíbrio, e, então, é abandonado a partir do repouso. Determine a equação que descreve o movimento. Quais são a amplitude e a frequência natural de vibração? Suponha que os deslocamentos positivos sejam medidos para baixo.

Obrigado Pela Atenção

Nos Encontramos na Próxima Aula

EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA