



# Vibrações Mecânicas

**Prof. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues**



## Aula - 6

# Vibração Livre não Amortecida



# Conteúdos Abordados Nessa Aula

Aula 6

-  Vibração Livre não Amortecida;
-  Sistema Massa-Mola
-  Sistemas com Um Grau de Liberdade;
-  Equações de Movimento.



# Definição de Vibração

Aula 6

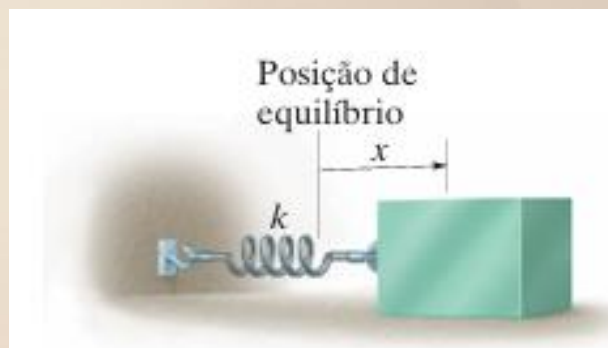
-  Vibração é todo movimento periódico de um corpo ou sistema de corpos interligados, em torno de uma posição de equilíbrio.
-  Em geral, há dois tipos de vibração, livre e forçada.
-  A vibração livre ocorre quando o movimento se mantém por forças restauradoras gravitacionais ou elásticas, como, por exemplo, O movimento de vai-e-vem de um pêndulo ou a vibração de uma barra elástica.
-  Uma vibração forçada é causada por uma força externa periódica ou intermitente aplicada ao sistema.
-  Ambos os tipos de vibração podem ser amortecidos ou não.



# Vibração Livre Não Amortecida

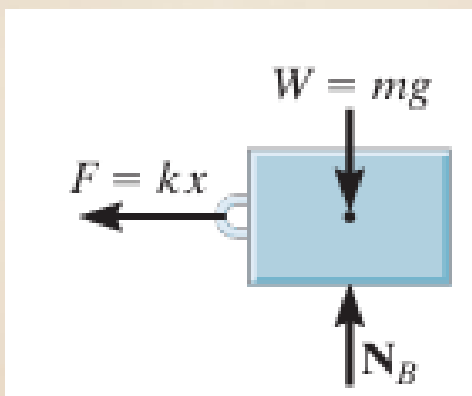
Aula 6

- 🌐 O tipo mais simples de movimento de vibração é o de vibração livre sem amortecimento representado pelo modelo mostrado na figura.
- 🌐 O bloco tem massa  $m$  e está ligado a uma mola de rigidez  $k$ . Um movimento de vibração ocorre quando o bloco é solto após ter sido deslocado para uma posição  $x$ , de modo que a mola, por estar deformada, puxa-o de volta.
- 🌐 O bloco atingirá uma velocidade tal que será capaz de ultrapassar a posição de equilíbrio  $x = 0$ , portanto o movimento adquirido, que será oscilatório, continuará indefinidamente, caso se considerem nulas as forças de atrito, como, por exemplo, no caso de uma superfície de apoio lisa.





- 🌐 O movimento dependente do tempo pode ser determinado aplicando-se a equação de movimento ao bloco considerado numa posição genérica  $x$ .
- 🌐 A figura mostra o diagrama de corpo livre. A força elástica restauradora, de intensidade  $F = k \cdot x$ , está sempre voltada para a posição de equilíbrio, enquanto a aceleração  $a$  é tomada genericamente com sentido positivo concordante com o do deslocamento. Ao observar que  $a = d^2x/dt^2 = \ddot{x}$ , temos:



$$\sum F_x = m \cdot a_x$$

$$-k \cdot x = m \cdot \ddot{x}$$



- 🌐 Observando que a aceleração é proporcional ao deslocamento do bloco. O movimento assim descrito é denominado movimento harmônico simples.

- 🌐 Após rearranjo, a equação anterior pode ser posta na “forma-padrão”:

$$-k \cdot x = m \cdot \ddot{x} \quad \longrightarrow \quad -\frac{k}{m} \cdot x = \ddot{x} \quad \longrightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

- 🌐 Conforme apresentado anteriormente, a frequência natural é dada por:

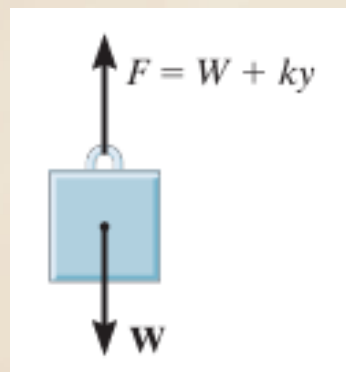
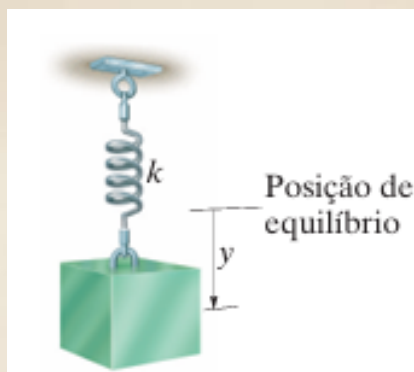
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- 🌐 Portanto, pode-se escrever que:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 \cdot x = 0$$



- 🌐 A equação padrão também pode ser obtida considerando-se o bloco suspenso e medindo-se o deslocamento  $y$  a partir da sua posição de equilíbrio.
- 🌐 Quando o bloco está em equilíbrio, a mola exerce nele uma força para cima de intensidade  $F = W = m \cdot g$ . Logo, quando o bloco é deslocado de uma distância  $y$  para baixo dessa posição, a intensidade da força da mola passa a ser  $F = W + k \cdot y$ . A aplicação da equação de movimento resulta em:



$$\sum F_y = m \cdot a_y$$

$$-W - k \cdot y + W = m \cdot \ddot{y}$$



$$-k \cdot y = m \cdot \ddot{y}$$

🌐 Portanto, pode-se escrever que:

$$\ddot{y} + \omega_n^2 \cdot y = 0$$



# Frequência Natural de Vibração

Aula 6

- 🌐 A frequência natural de vibração é uma característica intrínseca de um sistema mecânico que define a taxa na qual ele tende a oscilar quando é perturbado de sua posição de equilíbrio e não sofre influência de forças externas contínuas.
- 🌐 Fisicamente, ela representa o número de oscilações completas que o sistema realiza por unidade de tempo em resposta a uma pequena perturbação, sendo determinada exclusivamente pelas propriedades inerciais e elásticas do conjunto, como a massa e a rigidez.
- 🌐 Quando um corpo é deslocado de sua posição de repouso e liberado, a energia potencial armazenada em seus elementos elásticos, como molas, converte-se em energia cinética associada ao movimento da massa, e esse processo de troca de energia ocorre em um ritmo específico, que é a frequência natural.



# Frequência Natural de Vibração

Aula 6

- Essa frequência pode ser única para sistemas simples, como um oscilador massa-mola ideal, ou múltipla no caso de sistemas mais complexos, que possuem diversos modos de vibração.
- Na prática, conhecer a frequência natural é fundamental, pois quando o sistema é excitado por forças externas cuja frequência se aproxima desse valor, ocorre o fenômeno da ressonância, que pode amplificar drasticamente a amplitude das oscilações e causar falhas estruturais.
- Assim, a frequência natural não é apenas um parâmetro teórico, mas um aspecto físico fundamental que governa o comportamento dinâmico e a segurança de máquinas, estruturas e componentes mecânicos.



# Solução da Equação Padrão

Aula 6

- 🌐 A equação padrão é uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem, com coeficientes constantes. Portanto, a solução geral desse tipo de equação é dada por:

$$x = A \cdot \text{sen } \omega_n \cdot t + B \cdot \cos \omega_n \cdot t$$

- 🌐  $A$  e  $B$  são duas constantes de integração arbitrárias. A velocidade e a aceleração do bloco são determinadas por derivações temporais sucessivas, o que resulta em:

$$v = \dot{x} = A \cdot \omega_n \cdot \cos \omega_n \cdot t - B \cdot \omega_n \cdot \text{sen } \omega_n \cdot t$$

$$a = \ddot{x} = -A \cdot \omega_n^2 \cdot \text{sen } \omega_n \cdot t - B \cdot \omega_n^2 \cdot \cos \omega_n \cdot t$$

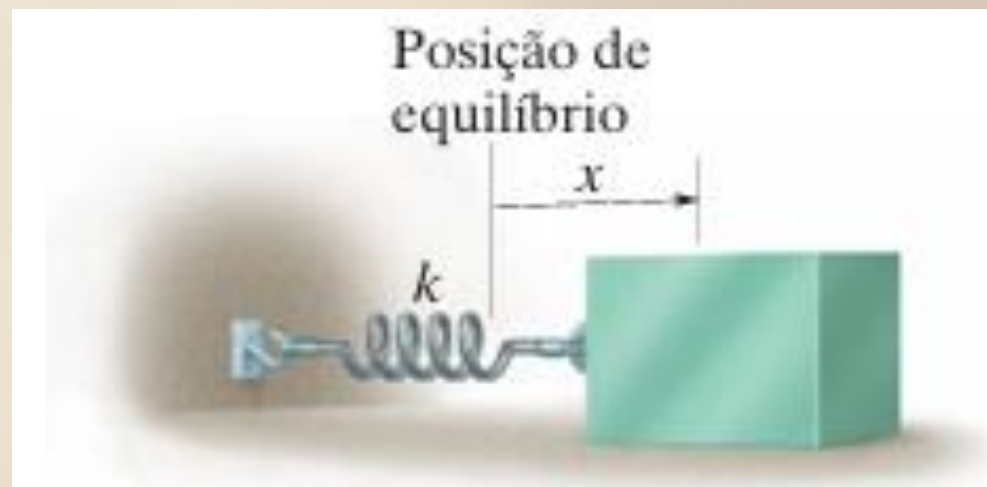
- 🌐 Verifica-se facilmente que quando as equações acima são substituídas na equação padrão, a equação diferencial é, de fato, satisfeita, mostrando que essas equações representam a solução da equação padrão.



# Determinação das Constantes $A$ e $B$

Aula 6

- As constantes arbitrárias  $A$  e  $B$  podem ser determinadas pelas condições iniciais do problema. Por exemplo, suponha que o bloco na figura tenha sido deslocado de uma distância  $x_1$  para a direita de sua posição de equilíbrio e recebeu uma velocidade inicial  $v_1$  para direita ( $v_1$  positiva).





# Determinação das Constantes A e B

Aula 6

Substituindo na equação do deslocamento  $x = x_1$  para  $t = 0$ , obtemos  $B = x_1$ :

$$x = A \cdot \sen \omega_n \cdot t + B \cdot \cos \omega_n \cdot t \quad \longrightarrow \quad x_1 = A \cdot \sen \omega_n \cdot 0 + B \cdot \cos \omega_n \cdot 0$$

$$x_1 = A \cdot \sen 0 + B \cdot \cos 0 \quad \longrightarrow \quad x_1 = A \cdot 0 + B \cdot 1 \quad \longrightarrow \quad B = x_1$$

Como  $v = v_1$  para  $t = 0$ , então, aplicando na equação da velocidade, chegamos a  $A = v_1 / \omega_n$ :

$$v = \dot{x} = A \cdot \omega_n \cdot \cos \omega_n \cdot t - B \cdot \omega_n \cdot \sen \omega_n \cdot t \quad \longrightarrow \quad v_1 = A \cdot \omega_n \cdot \cos \omega_n \cdot 0 - x_1 \cdot \omega_n \cdot \sen \omega_n \cdot 0$$

$$v_1 = A \cdot \omega_n \cdot \cos 0 - x_1 \cdot \omega_n \cdot \sen 0 \quad \longrightarrow \quad v_1 = A \cdot \omega_n \cdot 1 - x_1 \cdot \omega_n \cdot 0 \quad \longrightarrow \quad v_1 = A \cdot \omega_n \quad \longrightarrow \quad A = \frac{v_1}{\omega_n}$$

Com os valores de A e B determinados, a equação geral que descreve o movimento se torna:

$$x = A \cdot \sen \omega_n \cdot t + B \cdot \cos \omega_n \cdot t \quad \longrightarrow \quad x = \frac{v_1}{\omega_n} \cdot \sen \omega_n \cdot t + x_1 \cdot \cos \omega_n \cdot t$$



# Forma Simplificada da Equação Geral

Aula 6

- 🌐 A equação geral também pode ser expressa de forma mais simples em termos de uma função seno. Para isso, considera-se  $A = C \cdot \cos \emptyset$  e  $B = C \cdot \sin \emptyset$ , onde  $C$  e  $\emptyset$  são duas novas constantes arbitrárias a serem determinadas no lugar de  $A$  e  $B$ . Substituindo essas expressões na equação do deslocamento, temos:

$$x = A \cdot \sin \omega_n \cdot t + B \cdot \cos \omega_n \cdot t$$

$$x = C \cdot \cos \emptyset \cdot \sin \omega_n \cdot t + C \cdot \sin \emptyset \cdot \cos \omega_n \cdot t$$

- 🌐 Usando a identidade trigonométrica  $\sin(\theta + \emptyset) = \sin \theta \cdot \cos \emptyset + \cos \theta \cdot \sin \emptyset$ , e considerando que  $\theta = \omega_n \cdot t$ , pode-se escrever que:

$$x = C \cdot \sin(\omega_n \cdot t + \emptyset)$$

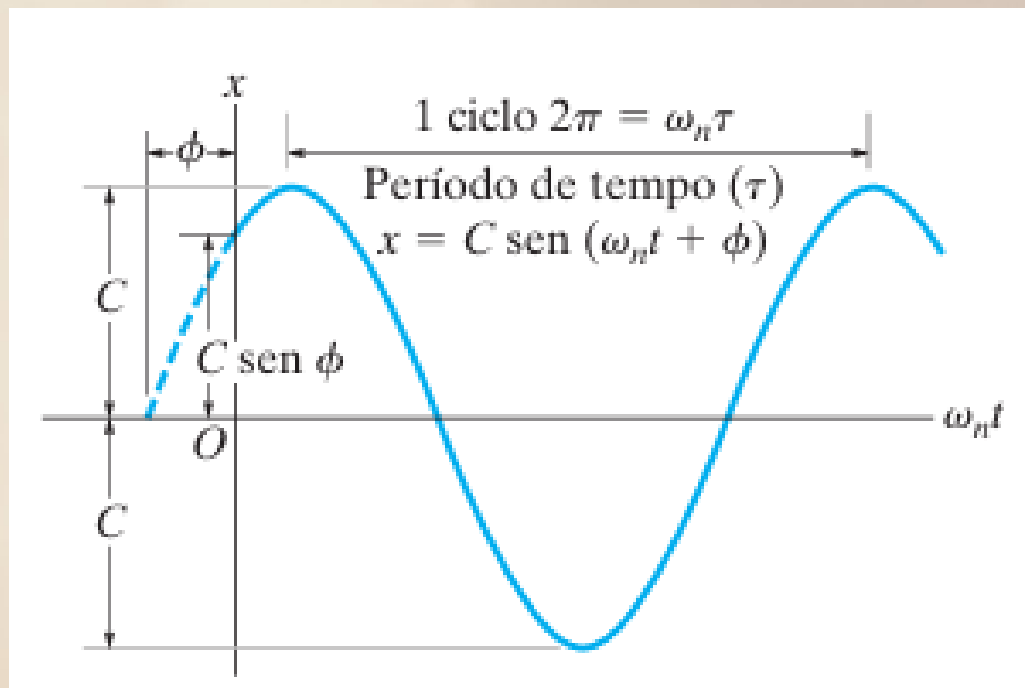


# Representação Gráfica

Aula 6

Um gráfico  $x$  versus  $\omega_n \cdot t$  para a equação geral pode ser visto na figura.

$$x = C \cdot \text{sen}(\omega_n \cdot t + \phi)$$





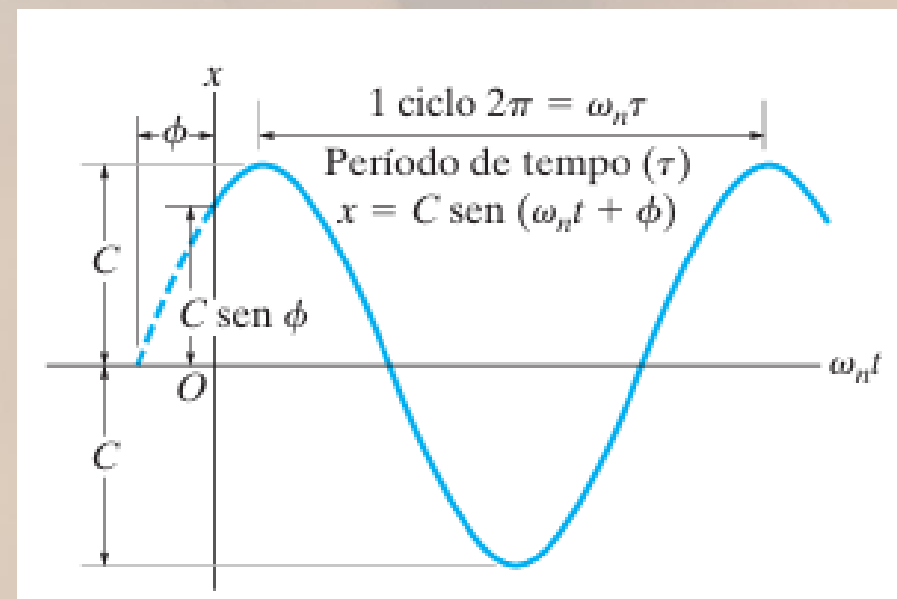
# Representação Gráfica

Aula 6

- 🌐 O deslocamento máximo do bloco relativamente à sua posição de equilíbrio é denominado amplitude da vibração.
- 🌐 Pode-se ver tanto da figura quanto da equação geral que a amplitude é  $C$ .
- 🌐 O ângulo ( $\phi$ ) é chamado de ângulo de fase ou, mais apropriadamente, inicial, pois ele representa quanto a curva está deslocada em relação à origem no instante  $t = 0$ .
- 🌐 As constantes  $C$  e  $\phi$  relacionam-se com  $A$  e  $B$  por meio das seguintes equações:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{B}{A}$$





# Período e Frequência

Aula 6

- 🌐 Observe que a curva senoidal completa um ciclo num tempo  $t = \tau$  quando  $\omega_n \cdot \tau = 2 \cdot \pi$ , ou seja:

$$\tau = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_n}$$

- 🌐 Esse tempo é denominado período, que também pode ser expresso como:

$$\tau = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

- 🌐 A frequência  $f$  é definida como o número de ciclos completos por unidade de tempo, sendo determinada pelo inverso do período, portanto:

$$f = \frac{\omega_n}{2 \cdot \pi}$$



$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$



- Quando um corpo ou sistema de corpos interligados sofre um deslocamento inicial a partir de sua posição de equilíbrio e, então, é abandonado, ele passa a vibrar com sua frequência natural.
- Se o corpo tem apenas um grau de liberdade, isto é, se sua posição pode ser especificada completamente por apenas uma coordenada, então o movimento de vibração do corpo terá as mesmas características do movimento harmônico simples do sistema bloco-mola discutido anteriormente.
- Consequentemente, o movimento do corpo será descrito por uma equação diferencial com a mesma 'forma-padrão', ou seja:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 \cdot x = 0$$

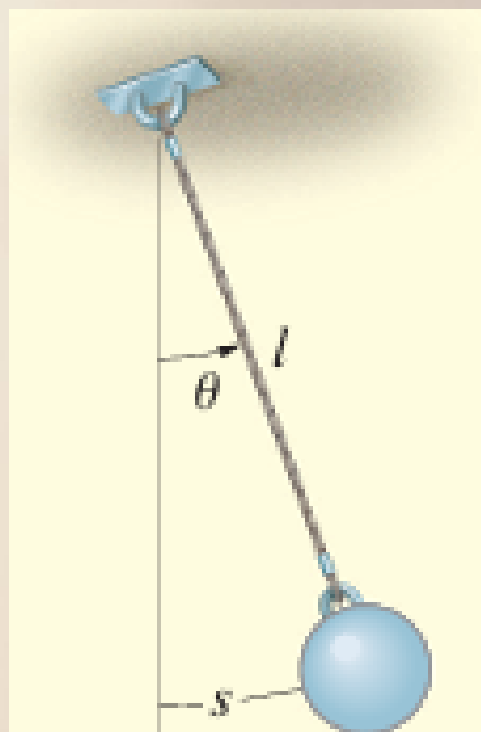
- Assim, se a pulsação natural  $\omega_n$  do corpo for conhecida, o período da vibração  $\tau$ , a frequência natural  $f$  e outras características do movimento de vibração do corpo poderão ser estabelecidos por meio das equações apresentadas.



# Exemplo de Aplicação

Aula 6

- ☉ Determine o período de vibração para o pêndulo simples mostrado na figura. A esfera tem massa  $m$  e o fio, comprimento  $l$ . Despreze o tamanho da esfera e a massa do fio. Considere o fio inextensível.



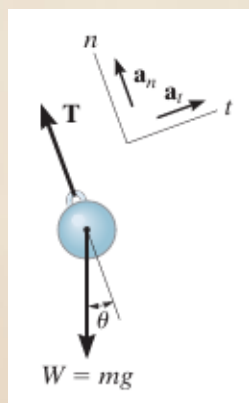
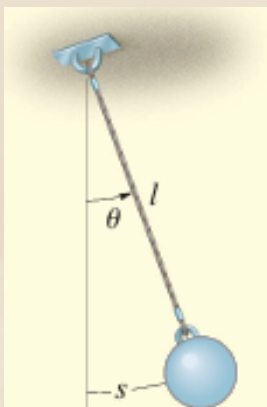


# Solução do Exemplo

Aula 6

## Diagrama de Corpo Livre:

-  O movimento do sistema será descrito por meio da coordenada de posição  $\theta$ . Quando a esfera está deslocada de um ângulo  $\theta$ , a força restauradora que age nela é dada pelo componente do peso  $m \cdot g \cdot \sin \theta$ . Além disso, a aceleração  $a_t$  tem o sentido de  $s$  (ou  $\theta$ ) crescente.



## Equação de Movimento:

-  Aplicando a equação de movimento na direção tangencial, pois a força restauradora tem essa direção, obtemos:

$$\sum F_t = m \cdot a_t$$

$$-m \cdot g \cdot \sin \theta = m \cdot a_t \quad (I)$$

## Cinemática:

-  Sabe-se que  $a_t = d^2s/dt^2 = \ddot{s}$  e que a coordenada  $s$  está relacionada com a posição angular  $\theta$  pela equação  $s = l \cdot \theta$ , de modo que  $a_t = \ddot{s} = l \cdot \ddot{\theta}$ .



# Solução do Exemplo

Aula 6

- Assim, a equação (I) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$-m \cdot g \cdot \sin \theta = m \cdot a_t \quad \longrightarrow \quad -g \cdot \sin \theta = a_t$$

$$-g \cdot \sin \theta = l \cdot \ddot{\theta} \quad \longrightarrow \quad -\frac{g}{l} \cdot \sin \theta = \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \cdot \sin \theta = 0$$

- Para pequenos deslocamentos tem-se que  $\sin \theta \approx \theta$ , portanto, a equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \cdot \theta = 0$$

- Por comparação, verifica-se que a equação obtida possui a forma padrão:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 \cdot x = 0$$

- Portanto, a frequência natural de oscilação do pêndulo simples é:

$$\omega_n^2 = \frac{g}{l} \quad \longrightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

- O Período é dado por:

$$\tau = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_n} \quad \longrightarrow \quad \tau = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

- Esse resultado indica que o período depende somente do comprimento do fio, e não da massa da esfera ou do ângulo  $\theta$ .



# Exercícios Propostos

Aula 6

1. Uma mola tem rigidez de 600 N/m. Um bloco de 4 kg é preso à mola, empurrado 50 mm acima da sua posição de equilíbrio e solto a partir do repouso. Determine a equação que descreve o movimento do bloco. Suponha que os deslocamentos positivos sejam medidos para baixo.
2. Quando se prende um bloco de 3 kg com uma mola, esta se alonga 60 mm. Determine a frequência natural e o período de vibração para um bloco de 0,2 kg ligado à mola.
3. Usa-se uma mola de rigidez  $k = 80$  N/m para suspender um bloco de 8 kg. Se ao bloco for comunicada uma velocidade para cima de 0,4 m/s quando este está 90 mm acima da sua posição de equilíbrio, determine a equação que descreverá o movimento do bloco e seu deslocamento máximo para cima, medido a partir da posição de equilíbrio. Suponha que os deslocamentos positivos sejam medidos para baixo.



# Exercícios Propostos

Aula 6

4. Considere um bloco de 6 kg suspenso por uma mola de rigidez  $k = 200 \text{ N/m}$ . Comunica-se ao bloco uma velocidade de  $0,4 \text{ m/s}$  para cima quando este está  $75 \text{ mm}$  acima da sua posição de equilíbrio. Determine a equação que descreve o movimento do bloco e o seu deslocamento máximo para cima, medido a partir de sua posição de equilíbrio. Suponha que os deslocamentos positivos sejam medidos para baixo.
5. Suspende-se um bloco de 3 kg por uma mola de rigidez  $k = 200 \text{ N/m}$ . O peso é empurrado  $50 \text{ mm}$  para cima, a partir da sua posição de equilíbrio, e, então, é abandonado a partir do repouso. Determine a equação que descreve o movimento. Quais são a amplitude e a frequência natural de vibração? Suponha que os deslocamentos positivos sejam medidos para baixo.

**Obrigado Pela Atenção**

**Nos Encontramos na Próxima Aula**

