EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

Vibrações Mecânicas

Prof. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues

EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

Aula - 4

Elementos de Massas

Conteúdos Abordados Nessa Aula

- Elementos de Massas;
- Associação de Massas.

Definição de Massa

- Na análise de vibrações mecânicas, a massa é um dos elementos fundamentais que compõem os modelos físicos dos sistemas vibratórios, representando a inércia do corpo ou do componente analisado.

- A massa é a propriedade física que expressa a quantidade de matéria de um corpo e sua resistência à mudança de movimento quando submetido a uma força.

- No contexto das vibrações, ela se manifesta como a capacidade do sistema de armazenar energia cinética durante o movimento oscilatório.

- Sempre que uma força é aplicada sobre um sistema vibratório, a massa resiste à aceleração imposta, gerando uma reação proporcional segundo a segunda lei de Newton

$$F = m \cdot a$$

Modelagem de Massa em Sistemas Vibratórios

- Na modelagem matemática dos sistemas vibratórios, a massa é geralmente representada como um ponto concentrado ou como uma distribuição contínua, dependendo da complexidade do sistema analisado.

- Em sistemas simplificados de um grau de liberdade, a massa é frequentemente tratada como um corpo rígido que não sofre deformações internas, concentrando-se em um único ponto.

- Já em sistemas mais complexos, com vários graus de liberdade ou estruturas distribuídas, a massa pode ser modelada como uma distribuição ao longo do comprimento, da superfície ou do volume, influenciando diretamente a dinâmica do sistema.

Relação da Massa com a Frequência Natural

Aula 4

- A presença da massa no sistema afeta diretamente a frequência natural de vibração, uma vez que ela aparece na equação que define essa frequência, sendo inversamente proporcional à raiz quadrada da massa.

- Isso significa que, quanto maior a massa, menor será a frequência natural, resultando em oscilações mais lentas.

- Por outro lado, massas menores tendem a gerar frequências naturais mais elevadas, caracterizando vibrações mais rápidas.

- Além disso, a massa influencia a amplitude de resposta do sistema quando este é submetido a excitações externas, especialmente na região próxima à ressonância, onde a combinação da massa com a rigidez do sistema determina o comportamento dinâmico.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}}$$

Importância da Massa em Sistemas Vibratórios

- Portanto, na análise de vibrações mecânicas, a massa não é apenas um parâmetro físico passivo, mas sim um elemento determinante na definição da dinâmica do sistema.

- Seu correto dimensionamento e modelagem são essenciais para prever o comportamento vibratório, otimizar o desempenho e garantir a segurança e a confiabilidade de máquinas, veículos, estruturas e equipamentos sujeitos a esforços dinâmicos.

- A interação da massa com os outros elementos do sistema, como as molas e os amortecedores, compõe o alicerce da análise vibratória, permitindo aos engenheiros desenvolverem soluções eficazes para controle de vibrações em uma ampla gama de aplicações industriais e tecnológicas.

Associação de Massas

- Na análise de vibrações mecânicas, as técnicas de associação de massas são fundamentais para a modelagem e simplificação de sistemas físicos complexos, permitindo que se representem adequadamente os efeitos da inércia no comportamento dinâmico dos corpos.

- A associação de massas pode ocorrer de forma análoga às associações de molas, sendo realizada basicamente em série ou em paralelo, dependendo da configuração física e do tipo de movimento analisado.

Associação em Série

- Quando massas estão associadas em série, significa que estão ligadas de forma que o movimento de uma depende diretamente do movimento da outra, e o deslocamento total do sistema é a soma dos deslocamentos individuais das massas.

- Esse tipo de associação é comum em sistemas onde componentes estão conectados por elementos flexíveis, e cada massa se desloca em relação à outra, resultando em movimentos relativos complexos.

- A formulação matemática para massas em série leva em consideração que a força transmitida é a mesma para cada massa, mas os deslocamentos podem variar.

Associação em Paralelo

- A associação de massas em paralelo ocorre quando múltiplas massas estão sujeitas ao mesmo deslocamento, porém recebem forças individuais proporcionais às suas respectivas inércias.

- Nesse caso, a massa equivalente do sistema é simplesmente a soma das massas associadas, e o comportamento dinâmico reflete a combinação direta de suas inércias, sendo uma técnica bastante utilizada na modelagem de estruturas em que várias partes se movem rigidamente juntas, como plataformas, vigas ou placas.

- A utilização correta da técnica de associação de massas é essencial para definir a matriz de massa em modelos de múltiplos graus de liberdade, seja em métodos analíticos, como a formulação direta das equações diferenciais, ou em métodos numéricos, como o método dos elementos finitos, no qual as massas podem ser concentradas nos nós ou distribuídas ao longo dos elementos.

Estratégias para Associação de Massas

- A associação de massas é uma estratégia indispensável no desenvolvimento de modelos de vibração simplificados.

- Essa abordagem permite capturar com boa precisão os principais modos de vibração do sistema, especialmente os modos de baixa frequência, que costumam ser os mais relevantes do ponto de vista de desempenho e segurança estrutural.

- A correta escolha entre modelar as massas como concentradas ou distribuídas, bem como sua associação em série ou em paralelo, impacta diretamente na determinação das frequências naturais, dos modos de vibração e da resposta dinâmica a excitações externas.

- Portanto, compreender e aplicar adequadamente as técnicas de associação de massas é uma etapa fundamental na análise de vibrações, garantindo que os modelos representem fielmente a realidade física do sistema e possibilitando o desenvolvimento de soluções eficientes para o controle de vibrações em aplicações industriais, automotivas, aeroespaciais, civis e em diversos outros setores da engenharia.

Massas em Movimento de Translação

Aula 4

- Na análise de vibrações mecânicas, quando se trata da associação de massas que estão em movimento de translação, diversas técnicas de solução matemática são aplicadas para compreender o comportamento dinâmico do sistema.

- A base dessas soluções reside na formulação das equações diferenciais do movimento, que descrevem como as forças inerciais, elásticas e, eventualmente, dissipativas atuam sobre as massas ao longo do tempo.

- Para massas associadas em movimento de translação, o primeiro passo é aplicar a segunda lei de Newton a cada massa, considerando que a força resultante sobre ela é igual ao produto da massa pela aceleração.

- A partir desse princípio fundamental, são construídas as equações diferenciais que, no caso de sistemas com várias massas, se apresentam como sistemas de equações diferenciais acopladas.

Massas em Movimento de Rotação

- Na análise de vibrações mecânicas, quando se tratam de massas associadas que estão em movimento de rotação, as técnicas de solução matemática seguem princípios análogos aos aplicados em movimentos de translação, porém adaptadas às características próprias dos sistemas rotacionais.

- A base fundamental é a aplicação da segunda lei de Newton para o movimento angular, onde o somatório dos momentos resultantes atuando sobre uma massa é igual ao produto do momento de inércia pela aceleração angular.

- Nesse contexto, a massa linear é substituída pelo momento de inércia, que representa a resistência da massa a mudanças em seu estado de rotação. As forças lineares são substituídas pelos torques ou momentos, e os deslocamentos lineares são representados por deslocamentos angulares.

Massas em Movimento Plano Geral

- Na análise de vibrações mecânicas, quando as massas estão submetidas a movimento plano geral, ou seja, um movimento que envolve simultaneamente translação e rotação acopladas, as técnicas de solução matemática tornam-se consideravelmente mais complexas e exigem uma abordagem integrada que leve em consideração tanto os efeitos lineares quanto os angulares.

- Nesse contexto, cada elemento do sistema possui tanto graus de liberdade translacionais quanto rotacionais, e as equações que regem o movimento devem refletir essa interação dinâmica entre deslocamentos lineares e angulares.

- A formulação matemática parte da aplicação simultânea das leis de Newton para a translação e das leis de Euler para a rotação, resultando em sistemas de equações diferenciais acopladas que descrevem o comportamento dinâmico completo do corpo.

Exemplo Prático – Automóvel

- Um exemplo prático de associação de massas na análise de vibrações mecânicas pode ser observado no estudo do comportamento dinâmico de um veículo automotivo, especialmente no sistema composto pelo chassi e pela suspensão.

- Neste contexto, o chassi do veículo é modelado como uma massa concentrada que representa a maior parte da massa total do automóvel, enquanto cada conjunto de roda e suspensão pode ser representado por massas menores associadas a ele.

- Essas massas não estão isoladas, mas sim associadas de forma que seus movimentos estejam interligados, tanto no sentido vertical quanto em rotações associadas ao balanço do veículo.

- Quando o veículo percorre uma estrada irregular, as massas das rodas sofrem excitações provenientes das imperfeições do solo, transmitindo forças ao chassi através dos elementos elásticos e amortecedores do sistema de suspensão.

Exemplo Prático – Automóvel

- A modelagem desse sistema resulta em um conjunto de massas acopladas, onde as massas das rodas estão em movimento relativo em relação ao chassi, e esse, por sua vez, também responde dinamicamente às forças transmitidas.

- Na formulação matemática, aplicam-se as leis da dinâmica para cada uma dessas massas, considerando tanto as forças verticais quanto os momentos de inércia associados a oscilações como arfagem e balanço.

- As equações diferenciais que governam esse sistema permitem prever, por exemplo, como o veículo se comportará ao passar por obstáculos ou ao trafegar em terrenos irregulares.

- A correta associação das massas, seja em paralelo, como ocorre quando se consideram os movimentos simultâneos das quatro rodas, ou em série, como nos casos em que se analisa o efeito da interação entre o conjunto roda-suspensão e o chassi, é fundamental para determinar as frequências naturais e os modos de vibração do veículo.

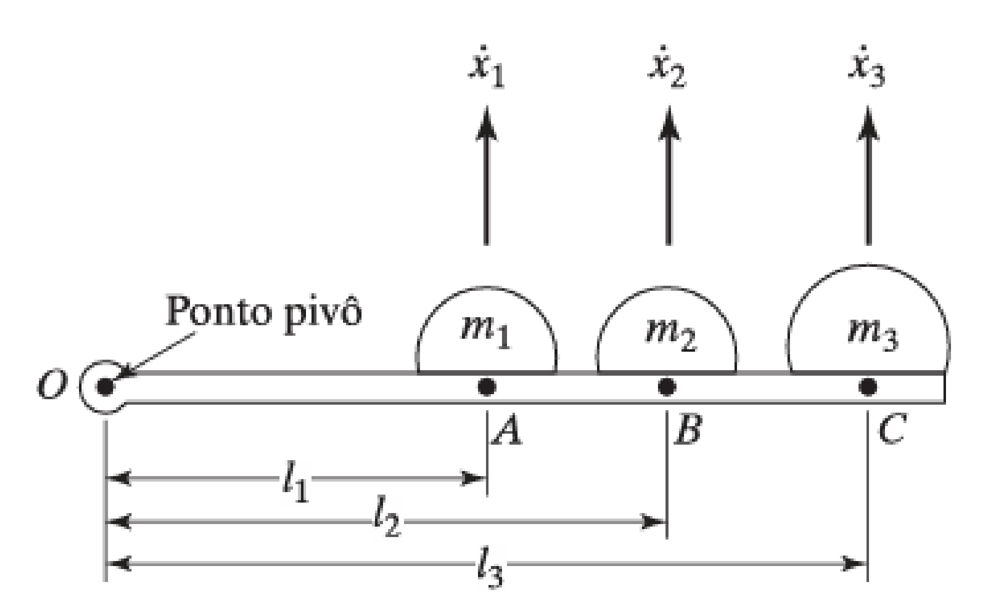
Exemplo Prático – Automóvel

- Esse estudo permite, na prática, realizar ajustes no projeto da suspensão, alterar rigidezes, distribuir melhor as massas ou incluir dispositivos de controle de vibrações, tudo visando melhorar o conforto dos ocupantes e garantir a estabilidade e segurança do automóvel.

- Portanto, esse exemplo evidencia claramente como a associação de massas na análise de vibrações mecânicas não é apenas um conceito teórico, mas uma ferramenta indispensável no desenvolvimento de soluções eficientes na engenharia automotiva.

Exemplo de Aplicação

- Determine a massa equivalente para o sistema de massas acopladas à barra rígida articulada mostrada na figura. Considere que a massa equivalente estará aplicada ao ponto A e que m_1 = 0,5 kg, m_2 = 0,5 kg, m_3 = 0,75 kg, l_1 = 0,5 m, l_2 = 1 m e l_3 = 1,5 m.



Solução do Exemplo

- Admitindo pequenos deslocamentos angulares da barra, as velocidades das massas m_2 e m_3 podem ser relacionadas com a velocidade da massa m_1 da seguinte forma:

  - Massa m_2: $\dot{x}_2 = \dfrac{l_2}{l_1} \cdot \dot{x}_1$

  - Massa m_3: $\dot{x}_3 = \dfrac{l_3}{l_1} \cdot \dot{x}_1$

- Como a posição da massa equivalente deve coincidir com a posição da massa m_1, tem-se uma relação direta entre as velocidades:

  - Massa m_{eq}: $\dot{x}_{eq} = \dot{x}_1$

- Igualando a energia cinética do sistema de três massas com a do sistema de massa equivalente, obtém-se:

$$\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot \dot{x}_3^2 = \frac{1}{2} \cdot m_{eq} \cdot \dot{x}_{eq}^2$$

Solução do Exemplo

Substituindo as velocidades, obtém-se:

$$\frac{1}{2}\cdot m_1\cdot\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}\cdot m_2\cdot\left(\frac{l_2}{l_1}\cdot\dot{x}_1\right)^2+\frac{1}{2}\cdot m_3\cdot\left(\frac{l_3}{l_1}\cdot\dot{x}_1\right)^2=\frac{1}{2}\cdot m_{eq}\cdot\dot{x}_1^2$$

$$\frac{1}{2}\cdot m_1\cdot\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}\cdot m_2\cdot\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2\cdot\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}\cdot m_3\cdot\left(\frac{l_3}{l_1}\right)^2\cdot\dot{x}_1^2=\frac{1}{2}\cdot m_{eq}\cdot\dot{x}_1^2$$

$$\frac{1}{2}\cdot\dot{x}_1^2\cdot\left[m_1+m_2\cdot\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2+m_3\cdot\left(\frac{l_3}{l_1}\right)^2\right]=\frac{1}{2}\cdot\dot{x}_1^2\cdot m_{eq}$$

$$\left[m_1+m_2\cdot\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2+m_3\cdot\left(\frac{l_3}{l_1}\right)^2\right]=m_{eq}$$

Portanto:

$$m_{eq}=\left[m_1+m_2\cdot\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2+m_3\cdot\left(\frac{l_3}{l_1}\right)^2\right]$$

Substituindo os valores fornecidos:

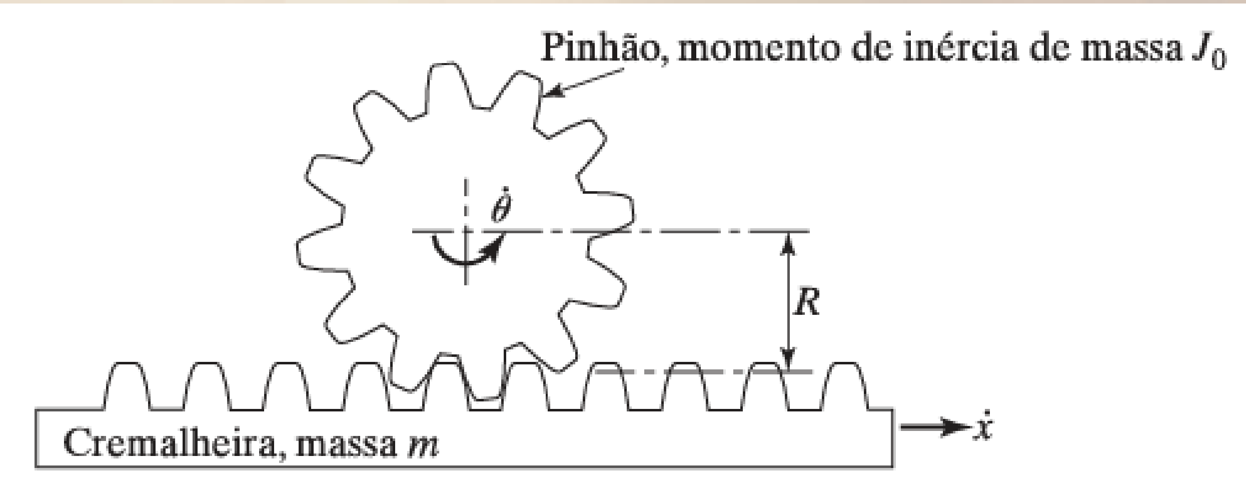
$$m_{eq}=\left[0{,}5+0{,}5\cdot\left(\frac{1}{0{,}5}\right)^2+0{,}75\cdot\left(\frac{1{,}5}{0{,}5}\right)^2\right]$$

$$m_{eq}=[0{,}5+2{,}0+6{,}75]$$

$$m_{eq}=9{,}25\,\mathrm{kg}$$

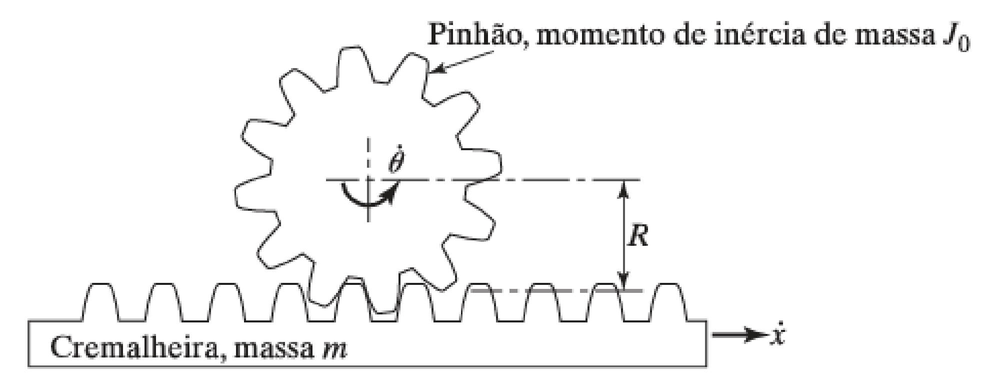
Exemplo de Aplicação

- Determine a massa equivalente para o sistema de massas de translação e rotação acopladas em um sistema cremalheira e pinhão conforme mostrado na figura.



Solução do Exemplo

- Considerando a massa m, com velocidade de translação $\dot{x}$, acoplada a outra massa (de momento de inércia J_0) com uma velocidade rotacional $\dot{\theta}$, conforme mostrado na figura, tem-se que essas duas massas podem ser associadas para se obter uma única massa equivalente de translação (m_{eq}), ou uma única massa equivalente de rotação (J_{eq}).



- Caso 1 – Massa Equivalente de Translação:

- Nessa situação, a energia cinética das duas massas é dada por:

$$T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot J_0 \cdot \dot{\theta}^2$$

- A energia cinética da massa equivalente é dada por:

$$T_{eq} = \frac{1}{2} \cdot m_{eq} \cdot \dot{x}_{eq}^2$$

Solução do Exemplo

Aplicando a conservação da energia cinética ($T = T_{eq}$), tem-se que:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot J_0 \cdot \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \cdot m_{eq} \cdot \dot{x}_{eq}^2$$

Considerando $\dot{x}_{eq} = \dot{x}$ e $\dot{\theta} = \dot{x}/R$:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot J_0 \cdot \left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot m_{eq} \cdot \dot{x}^2$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot J_0 \cdot \frac{\dot{x}^2}{R^2} = \frac{1}{2} \cdot m_{eq} \cdot \dot{x}^2$$

$$\frac{1}{2} \cdot \dot{x}^2 \cdot \left(m + \frac{J_0}{R^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \dot{x}^2 \cdot m_{eq}$$

Portanto: $\Rightarrow$ $m_{eq} = \left(m + \dfrac{J_0}{R^2}\right)$

Caso 2 – Massa Equivalente Rotacional:

Nessa situação, a energia cinética das duas massas é dada por:

$$T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot J_0 \cdot \dot{\theta}^2$$

A energia cinética da massa equivalente rotacional é dada por:

$$T_{eq} = \frac{1}{2} \cdot J_{eq} \cdot \dot{\theta}_{eq}^2$$

Solução do Exemplo

- Aplicando a conservação da energia cinética ($T = T_{eq}$), tem-se que:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot J_0 \cdot \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \cdot J_{eq} \cdot \dot{\theta}_{eq}^2$$

- Nessa situação $\dot{\theta}_{eq} = \dot{\theta}$ e $\dot{x} = \dot{\theta} \cdot R$:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\dot{\theta} \cdot R\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot J_0 \cdot \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \cdot J_{eq} \cdot \dot{\theta}^2$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{\theta}^2 \cdot R^2 + \frac{1}{2} \cdot J_0 \cdot \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \cdot J_{eq} \cdot \dot{\theta}^2$$

$$\frac{1}{2} \cdot \dot{\theta}^2 \cdot (m \cdot R^2 + J_0) = \frac{1}{2} \cdot \dot{\theta}^2 \cdot J_{eq}$$

- Portanto:

$$J_{eq} = J_0 + (m \cdot R^2)$$

Obrigado Pela Atenção

Nos Encontramos na Próxima Aula

EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA