EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

Vibrações Mecânicas

Prof. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues

EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA

Aula - 3

Elementos de Molas

Conteúdos Abordados Nessa Aula

- Elementos de Molas;
- Associação de Molas.

Definição de Mola Linear

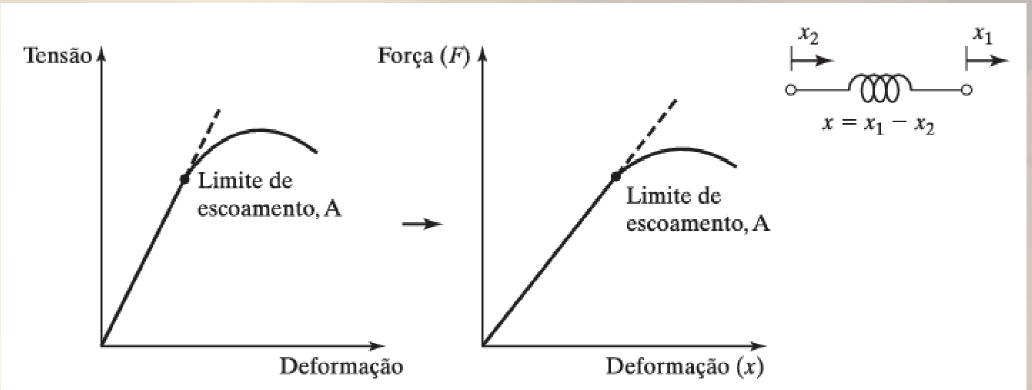
- Uma mola linear é um elemento mecânico que possui a propriedade de deformar-se elasticamente quando submetida a uma força e, após a remoção dessa força, tende a retornar à sua configuração original.

- A principal característica de uma mola linear é que a força exercida por ela é diretamente proporcional à deformação sofrida, obedecendo à chamada Lei de Hooke.

- Essa relação linear é válida dentro dos limites elásticos do material que constitui a mola, isto é, enquanto a deformação não ultrapassar o ponto em que ocorrem alterações permanentes na estrutura do material.

Deformação de uma Mola Linear

Aula 3



- De acordo com a Lei de Hooke, a força *F* exercida por uma mola linear é diretamente proporcional ao seu alongamento ou compressão *x*, medido em relação à sua posição de equilíbrio, e o equacionamento dessa força é expresso por:

$$F = k \cdot x$$

- A constante *k* depende das propriedades do material e da geometria da mola, e determina o quão resistente a mola é à deformação, ou seja, quanto maior o valor de *k*, maior será a força necessária para provocar um determinado deslocamento.

Trabalho Realizado pela Força da Mola

- O trabalho realizado pela força da mola ao longo de uma deformação também pode ser determinado a partir dessa relação fundamental.

- Considerando que a força varia linearmente com o deslocamento, o cálculo do trabalho U realizado pela mola quando ela é deformada de uma posição inicial x = 0 até uma posição final x corresponde à área sob o gráfico da força em função do deslocamento, que possui a forma de um triângulo.

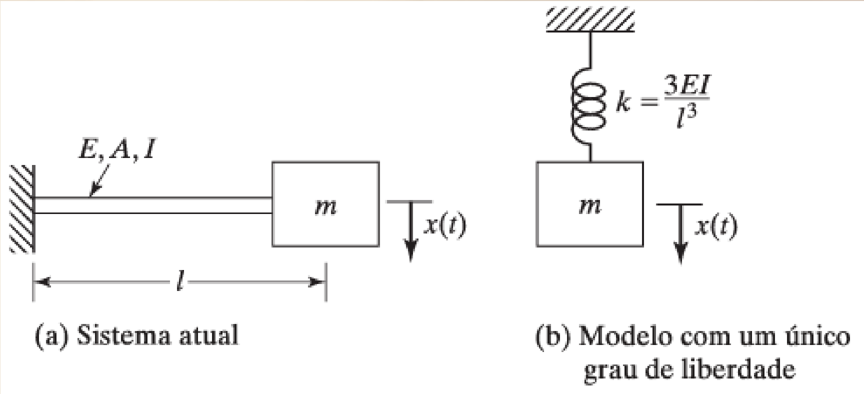
- Assim, o trabalho realizado pode ser obtido pela integral da força em relação ao deslocamento, resultando na expressão:

$$U = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

Analogia da Mola com Elementos Elásticos

- Elementos elásticos como vigas também se comportam como molas.

- Por exemplo, considere a viga em balanço com uma massa *m* em sua extremidade conforme mostrado na figura.



- Pela Resistência dos Materiais, sabe-se que a deflexão estática da extremidade livre da viga é dada por:

$$\delta_{st} = \frac{W \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

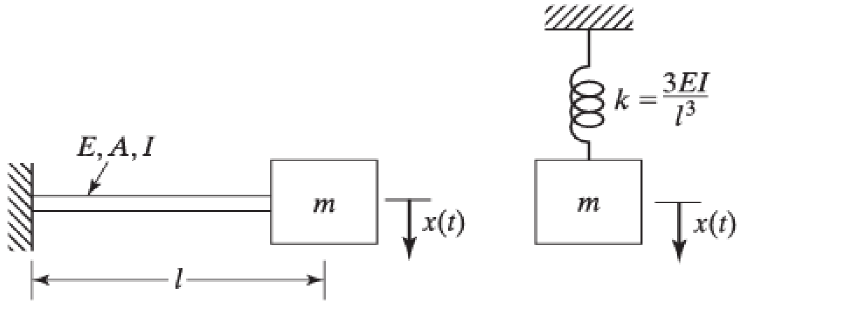
Analogia da Mola com Elementos Elásticos

Relacionando com a equação da mola, pode-se escrever que:

$$F = k \cdot x \quad \Rightarrow \quad k = \frac{F}{x} = \frac{W}{\delta_{st}}$$

$$k = \frac{W}{\frac{W \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I}}$$

$$k = \frac{3 \cdot E \cdot I \cdot W}{W \cdot l^3} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{3 \cdot E \cdot I}{l^3}$$



(a) Sistema atual (b) Modelo com um único grau de liberdade

W = Peso da massa *m*;
E = Módulo de Elasticidade;
I = Momento de Inércia da Seção Transversal da Viga.

Associação de Molas

- As técnicas de associação de molas na análise de vibrações mecânicas são fundamentais para modelar e compreender o comportamento de sistemas elásticos compostos, nos quais múltiplas molas atuam simultaneamente para resistir a forças aplicadas.

- A associação de molas pode ocorrer de duas formas básicas: em série ou em paralelo, e cada uma dessas configurações resulta em diferentes características dinâmicas que afetam diretamente a rigidez total do sistema e, consequentemente, sua resposta vibratória.

- A escolha da configuração e o cálculo da rigidez equivalente são etapas essenciais na simplificação de sistemas reais, permitindo que modelos complexos sejam analisados de maneira mais eficiente por meio de métodos matemáticos.

Associação em Série

- Na associação em série, duas ou mais molas são conectadas de modo que a força aplicada atue sucessivamente sobre cada uma delas, resultando em um deslocamento total que é a soma dos deslocamentos individuais de cada mola.

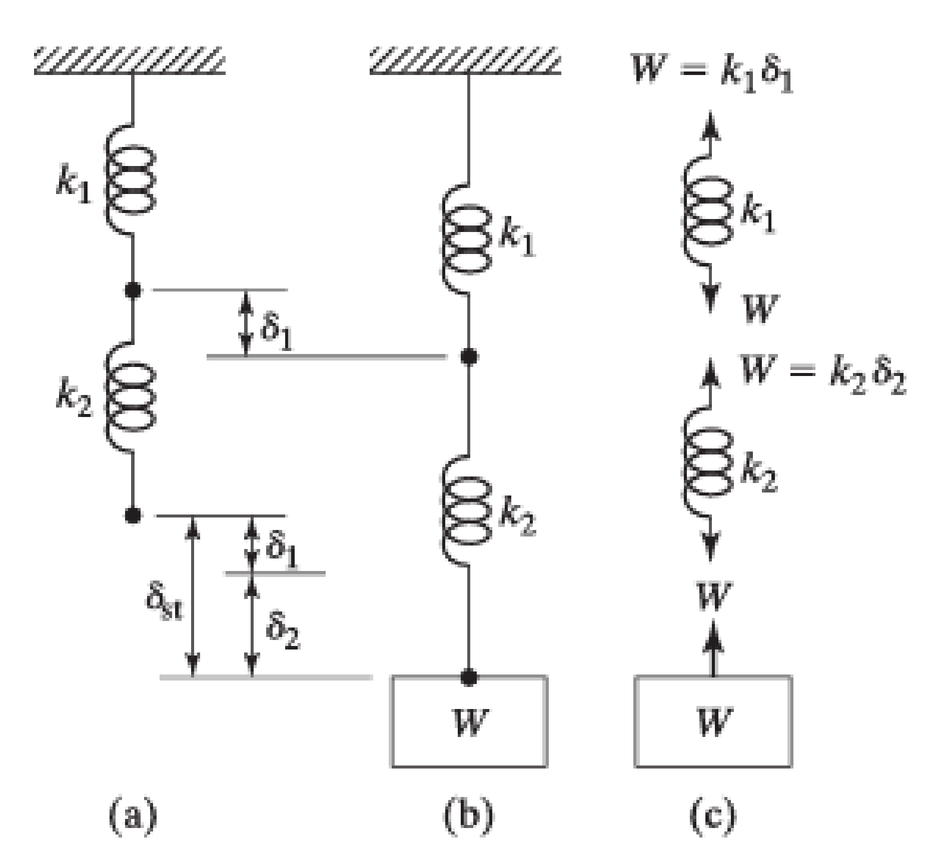
- Nesse caso, a rigidez equivalente k_{eq} do sistema é calculada a partir da inversa da soma das inversas das rigidezes individuais, seguindo a expressão:

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \cdots + \frac{1}{k_n}$$

- Essa configuração resulta em uma rigidez equivalente inferior à menor rigidez entre as molas associadas, tornando o sistema mais flexível e, consequentemente, mais suscetível a deslocamentos maiores sob uma mesma força aplicada.

- Esse tipo de associação é comumente encontrado em sistemas onde a distribuição da deformação ou o isolamento de vibrações é desejado.

Associação em Série



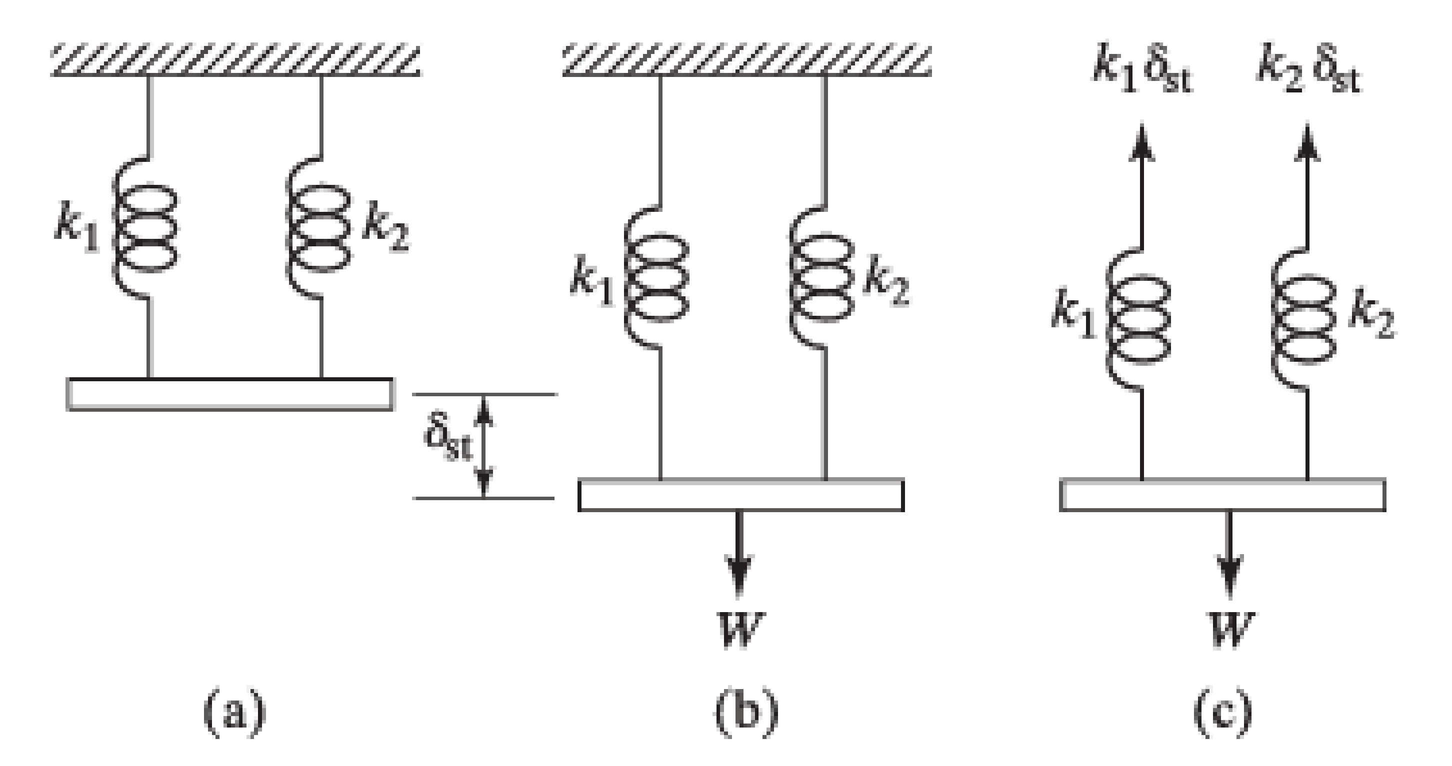
Associação em Paralelo

- Na associação em paralelo, as molas são dispostas de modo que todas se deformem simultaneamente sob a ação da mesma força, dividindo essa carga entre si.
- O deslocamento é igual para todas as molas, mas a força total aplicada é a soma das forças resistidas por cada mola.
- A rigidez equivalente neste caso é obtida por meio da soma direta das rigidezes individuais, ou seja:

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_n$$

- Assim, a associação em paralelo resulta em um sistema mais rígido do que qualquer uma das molas isoladas, reduzindo os deslocamentos sob uma mesma carga.
- Esse tipo de configuração é frequentemente utilizado quando se busca reforçar a estrutura ou aumentar a capacidade de suporte de carga sem comprometer a estabilidade vibratória.

Associação em Paralelo

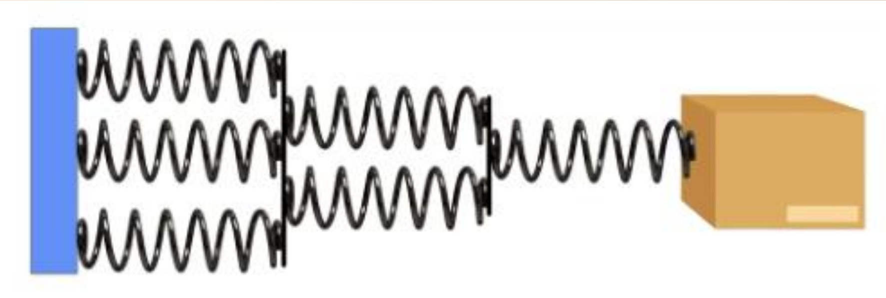


Associação Mista de Molas

- Além das associações puras, muitos sistemas mecânicos envolvem combinações mistas de molas em série e em paralelo, exigindo um tratamento analítico mais elaborado para a determinação da rigidez equivalente.

- Nesse contexto, a aplicação sistemática das técnicas de associação permite decompor o sistema complexo em subsistemas mais simples, cuja rigidez pode ser calculada de forma sequencial e organizada.

- Portanto, as técnicas de associação de molas são ferramentas fundamentais na engenharia de vibrações, proporcionando uma base teórica sólida para o desenvolvimento de modelos precisos e para a elaboração de soluções eficientes em diversas aplicações industriais e estruturais.



Compreensão das Técnicas de Associação

- O entendimento dessas técnicas de associação é indispensável para a análise de sistemas vibratórios, especialmente na determinação das frequências naturais e dos modos de vibração.

- A rigidez do sistema, diretamente influenciada pela associação das molas, afeta a frequência natural segundo a relação mostrada na equação a seguir. Onde *m* é a massa associada ao sistema.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}}$$

- Assim, a escolha adequada entre associações em série ou em paralelo permite o ajuste fino das características dinâmicas do sistema, viabilizando o projeto de estruturas e mecanismos que operem de forma segura, eficiente e conforme os requisitos específicos de desempenho vibratório.

Exemplo Prático – Molas Ferroviárias

- As molas são componentes fundamentais para garantir a segurança e estabilidade dos trens em movimento.
- Elas são responsáveis por absorver choques, manter a estabilidade em alta velocidade e reduzir a vibração dos vagões.
- As molas ferroviárias possuem uma grande capacidade de carga e durabilidade, e por isso são utilizadas em larga escala nos sistemas ferroviários.
- Os trens, em geral, possuem dois tipos de molas: as molas helicoidais e as molas planas.
- As molas helicoidais, como o próprio nome indica, possuem um formato espiral e são comumente utilizadas na suspensão dos vagões.
- Já as molas planas são utilizadas em outras partes do trem, como nos freios e nos truques.

Associação de Molas Ferroviárias

Exemplo Prático - Feixe de Molas em Caminhões

- O feixe de molas utilizado em caminhões e veículos pesados configura-se, do ponto de vista mecânico, como um sistema de associação de molas em paralelo.

- Esse tipo de associação ocorre porque as lâminas metálicas que compõem o feixe são dispostas uma sobre a outra, de modo que, quando o feixe é submetido a uma carga, todas as lâminas sofrem deformações simultâneas, compartilhando o esforço de sustentação e absorção das forças aplicadas.

- A deformação ocorre de maneira semelhante em cada lâmina, respeitando as características geométricas e materiais individuais, mas contribuindo conjuntamente para a rigidez global do sistema de suspensão.

- Assim, a força total aplicada ao feixe corresponde à soma das forças resistidas por cada uma das lâminas, característica típica de uma associação em paralelo.

Exemplo Prático - Feixe de Molas em Caminhões

- Essa configuração é essencial para o desempenho do feixe de molas, pois proporciona uma rigidez estrutural elevada, fundamental para suportar grandes cargas, como é requerido em caminhões e veículos de transporte pesado.

- Ao mesmo tempo, a associação em paralelo permite certa flexibilidade do sistema, possibilitando que o feixe atue como um elemento de amortecimento que absorve parte da energia vibratória resultante do contato do veículo com superfícies irregulares.

- A rigidez equivalente do feixe é determinada pela soma das rigidezes individuais das lâminas, e a adição ou remoção de lâminas modifica diretamente a capacidade de carga e o comportamento dinâmico do sistema.

Exemplo Prático - Feixe de Molas em Caminhões

- A escolha da associação em paralelo no projeto do feixe de molas deve-se à necessidade de combinar resistência, durabilidade e eficiência na dissipação de vibrações.

- Enquanto sistemas de molas em série oferecem maior flexibilidade e maiores deslocamentos sob carga, eles não são adequados para aplicações que exigem alta resistência e controle preciso de deformações, como no caso do transporte de cargas pesadas.

- Assim, a associação em paralelo se apresenta como a solução mais apropriada, assegurando que o feixe de molas atenda às exigências funcionais e de segurança dos veículos comerciais.

- A análise dessa associação é fundamental para o dimensionamento correto do sistema, a fim de evitar falhas estruturais e assegurar o conforto e a segurança na operação do veículo, especialmente em situações que envolvem intensas solicitações dinâmicas e vibrações.

Exemplo Prático - Feixe de Molas em Caminhões

Exemplo de Aplicação

- A figura mostra o sistema de suspensão de um vagão ferroviário de carga com um arranjo de molas em paralelo. Determine a constante elástica equivalente da suspensão se cada uma das três molas helicoidais for fabricada em aço com um módulo de elasticidade transversal G = 80 GPa e tiver cinco espiras efetivas, diâmetro médio do enrolamento D = 20 cm e diâmetro do arame d = 2 cm.

Solução do Exemplo

- A rigidez para uma mola helicoidal é determinada da seguinte forma:

$$k = \frac{d^4 \cdot G}{8 \cdot D^3 \cdot n}$$

- Portanto:

$$k = \frac{(0{,}02)^4 \cdot (80 \cdot 10^9)}{8 \cdot (0{,}2)^3 \cdot 5}$$

$$k = 40000 \text{ N/m}$$

- Como as três molas são idênticas e estão associadas em paralelo, a rigidez equivalente do sistema será:

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + k_3$$

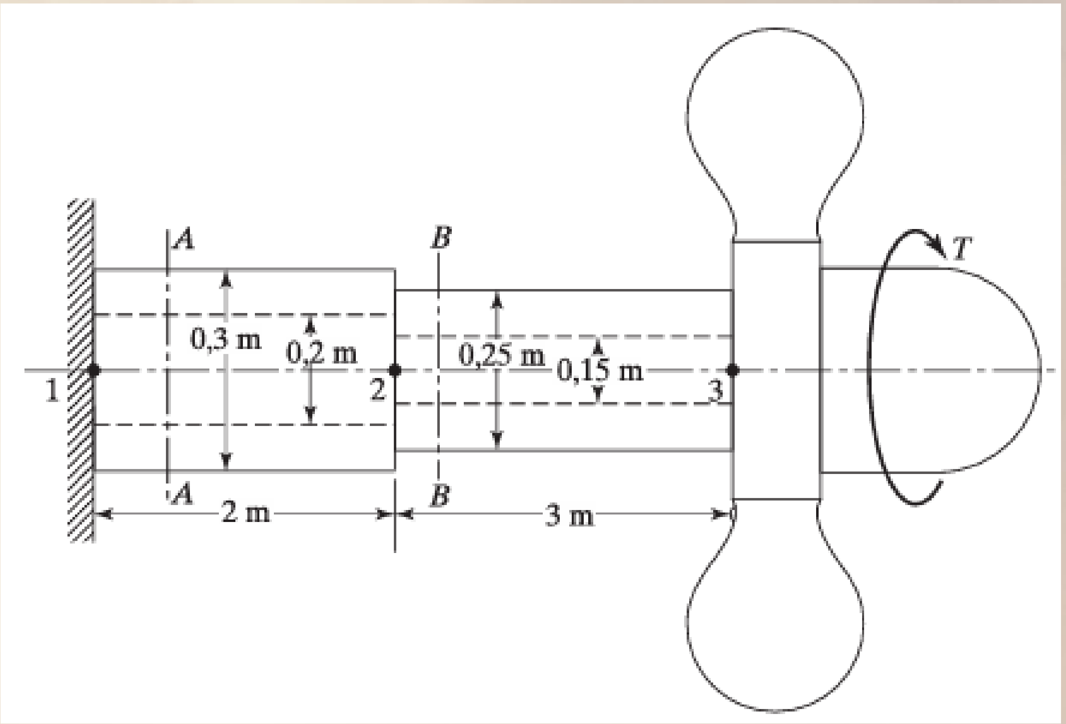
$$k_{eq} = k + k + k$$

$$k_{eq} = 3 \cdot k$$

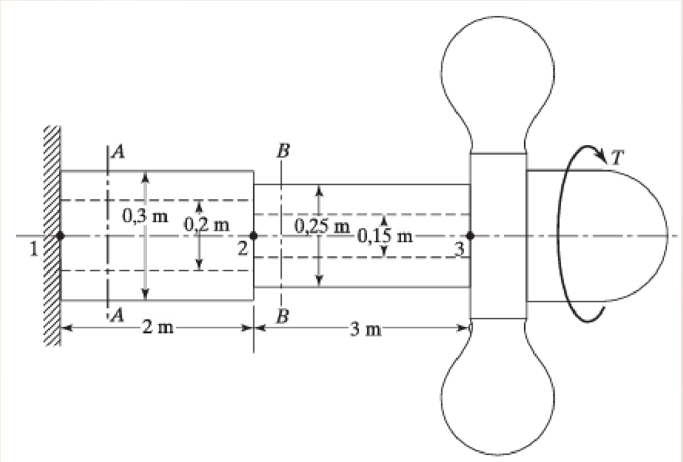
$$k_{eq} = 3 \cdot 40000 \Rightarrow k_{eq} = 120000 \text{ N/m}$$

Exemplo de Aplicação

- Determine a constante elástica torcional do eixo de hélice em aço (G = 80 GPa) mostrado na figura.



Solução do Exemplo



- Para a solução do problema é necessário considerar os segmentos 1,2 e 2,3 do eixo como uma associação de molas em série, pois pode-se verificar que o torque induzido em qualquer seção transversal do eixo é igual ao torque *T* aplicado na hélice.

- Para um eixo vazado, o momento polar de inércia *J* é dado por:

$$J = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32}$$

- A constante elástica torcional para um eixo vazado é determinada da seguinte forma:

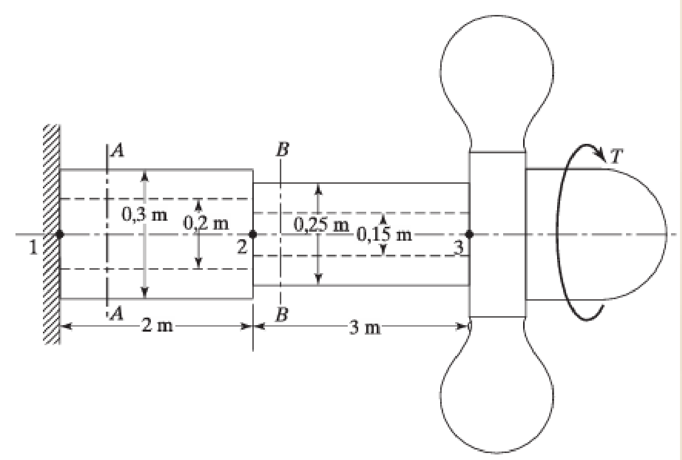
$$k = \frac{G \cdot J}{l}$$

- Portanto, combinando-se as duas equações:

$$k = \frac{G}{l} \cdot \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32}$$

$$k = \frac{\pi \cdot G \cdot (D^4 - d^4)}{32 \cdot l}$$

Solução do Exemplo



Para o segmento 1,2, tem-se que:

$$k_{t1,2} = \frac{\pi \cdot G \cdot \left({D_{1,2}}^4 - {d_{1,2}}^4\right)}{32 \cdot l_{1,2}}$$

$$k_{t1,2} = \frac{\pi \cdot (80 \cdot 10^9) \cdot (0{,}3^4 - 0{,}2^4)}{32 \cdot 2}$$

$$k_{t1,2} = 25{,}5255 \cdot 10^6 \text{ Nm/rad}$$

Para o segmento 2,3, tem-se que:

$$k_{t2,3} = \frac{\pi \cdot G \cdot \left({D_{2,3}}^4 - {d_{2,3}}^4\right)}{32 \cdot l_{2,3}}$$

$$k_{t2,3} = \frac{\pi \cdot (80 \cdot 10^9) \cdot (0{,}25^4 - 0{,}15^4)}{32 \cdot 3}$$

$$k_{t2,3} = 8{,}9012 \cdot 10^6 \text{ Nm/rad}$$

Como o sistema está associado em série, a rigidez equivalente será:

$$\frac{1}{k_{teq}} = \frac{1}{k_{t1,2}} + \frac{1}{k_{t2,3}}$$

Solução do Exemplo

$$\frac{1}{k_{teq}} = \frac{1}{k_{t1,2}} + \frac{1}{k_{t2,3}}$$

- O mínimo múltiplo comum do termo direito da equação é:

$$k_{t1,2} \cdot k_{t2,3}$$

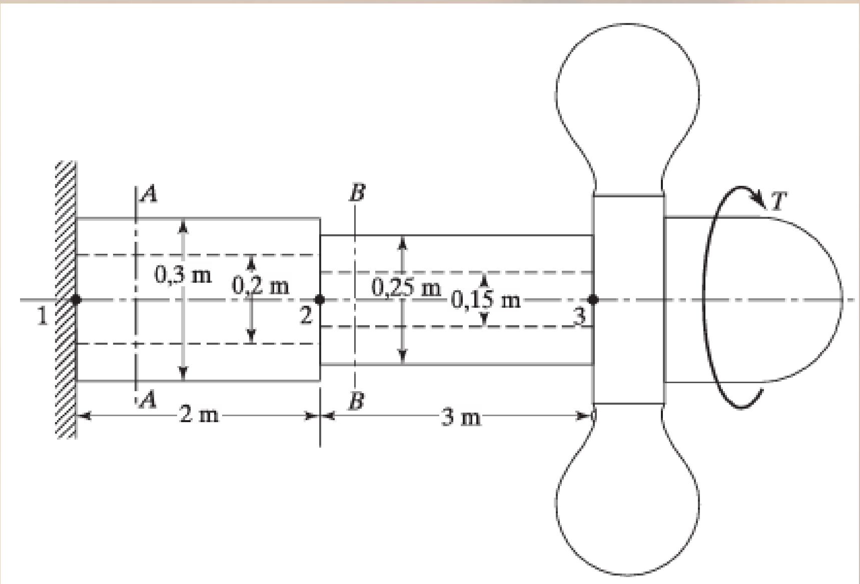
- Portanto:

$$\frac{1}{k_{teq}} = \frac{k_{t1,2} + k_{t2,3}}{k_{t1,2} \cdot k_{t2,3}}$$

$$k_{teq} = \frac{k_{t1,2} \cdot k_{t2,3}}{k_{t1,2} + k_{t2,3}}$$

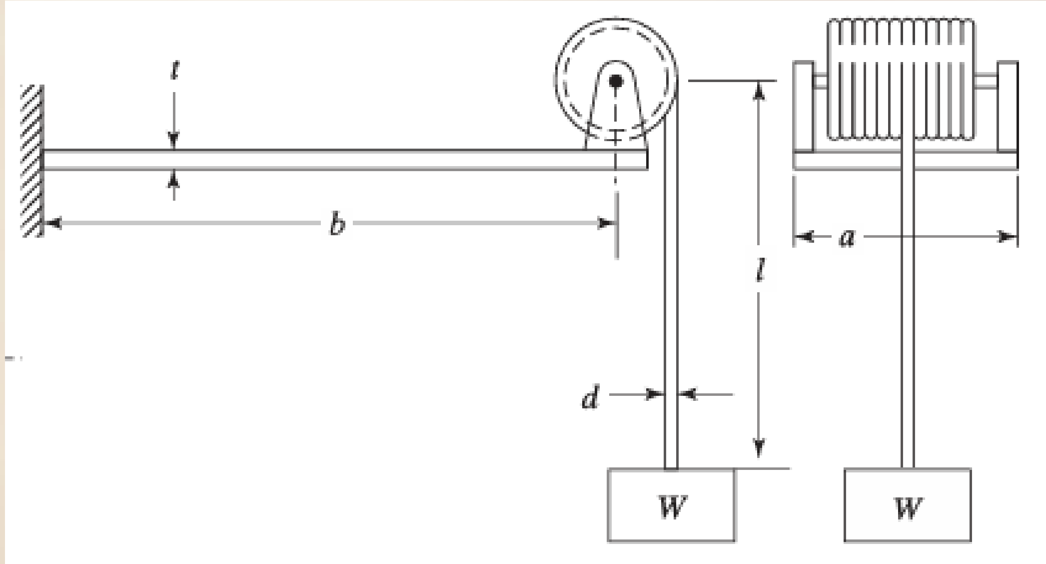
$$k_{teq} = \frac{25{,}5255 \cdot 10^6 \cdot 8{,}9012 \cdot 10^6}{25{,}5255 \cdot 10^6 + 8{,}9012 \cdot 10^6}$$

$$k_{teq} = 6{,}5997 \cdot 10^6 \ \text{Nm/rad}$$

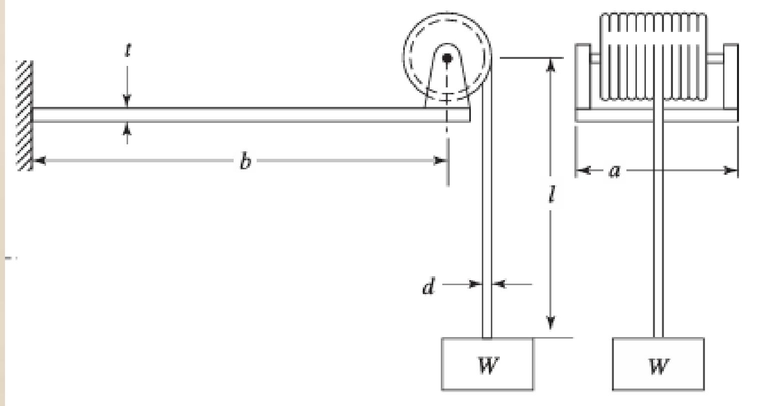


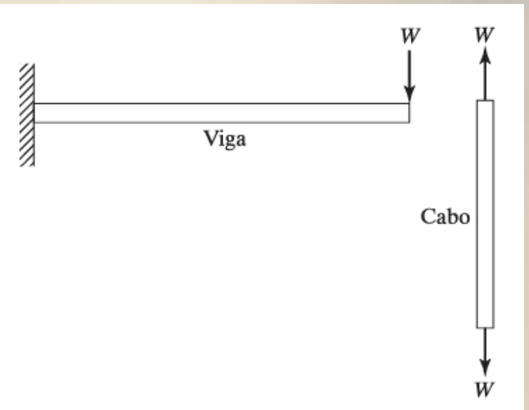
Exemplo de Aplicação

- Um tambor de içamento equipado com um cabo de aço é montado na extremidade de uma viga em balanço como mostrado na figura. Determine a constante elástica equivalente do sistema quando o comprimento de suspensão do cabo é *l*. Admita que o diâmetro efetivo da seção transversal do cabo é *d* e que o módulo de elasticidade da viga e do cabo é *E*.



Solução do Exemplo





- Para uma viga em balanço, a constante elástica é dada por:

$$k_b = \frac{3 \cdot E \cdot I}{l^3}$$

- O momento de inércia da viga é dado por:

$$I = \frac{1}{12} \cdot a \cdot t^3$$

- Considerando as dimensões mostradas na figura, pode-se escrever que:

$$k_b = \frac{3 \cdot E \cdot \frac{1}{12} \cdot a \cdot t^3}{b^3}$$

$$k_b = \frac{3 \cdot E \cdot a \cdot t^3}{12 \cdot b^3} \Rightarrow k_b = \frac{E \cdot a \cdot t^3}{4 \cdot b^3}$$

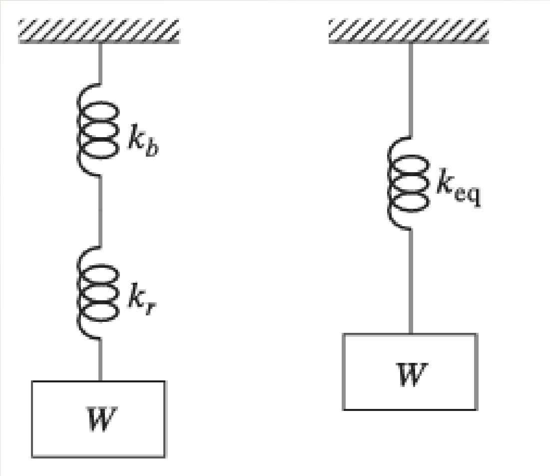
- Para o cabo de seção circular com carregamento axial, a constante elástica é dada por:

$$k_r = \frac{A \cdot E}{l} \Rightarrow k_r = \frac{\frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot E}{l}$$

$$k_r = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot E}{4 \cdot l}$$

Solução do Exemplo

- Visto que tanto o cabo quanto a viga estão submetidos a mesma carga *W*, o sistema pode ser modelado como uma associação de molas em série, portanto:



$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_b} + \frac{1}{k_r}$$

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{\frac{E \cdot a \cdot t^3}{4 \cdot b^3}} + \frac{1}{\frac{\pi \cdot d^2 \cdot E}{4 \cdot l}}$$

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{4 \cdot b^3}{E \cdot a \cdot t^3} + \frac{4 \cdot l}{\pi \cdot d^2 \cdot E}$$

- O mínimo múltiplo comum do termo direito da equação é:

$$E^2 \cdot a \cdot t^3 \cdot \pi \cdot d^2$$

- Portanto:

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{E \cdot \pi \cdot d^2 \cdot 4 \cdot b^3 + E \cdot a \cdot t^3 \cdot 4 \cdot l}{E^2 \cdot a \cdot t^3 \cdot \pi \cdot d^2}$$

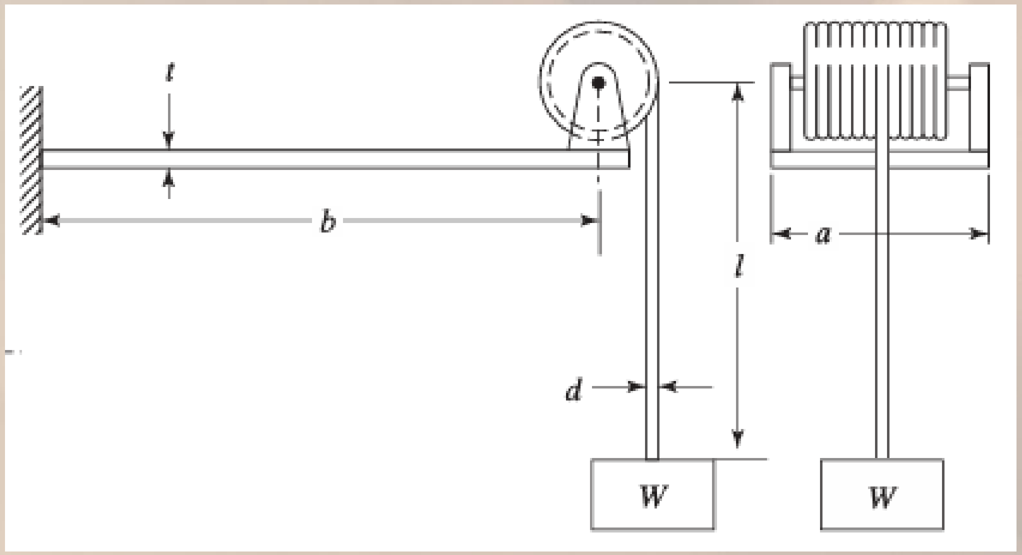
Solução do Exemplo

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{E \cdot \pi \cdot d^2 \cdot 4 \cdot b^3 + E \cdot a \cdot t^3 \cdot 4 \cdot l}{E^2 \cdot a \cdot t^3 \cdot \pi \cdot d^2}$$

$$\frac{E^2 \cdot a \cdot t^3 \cdot \pi \cdot d^2}{E \cdot \pi \cdot d^2 \cdot 4 \cdot b^3 + E \cdot a \cdot t^3 \cdot 4 \cdot l} = k_{eq}$$

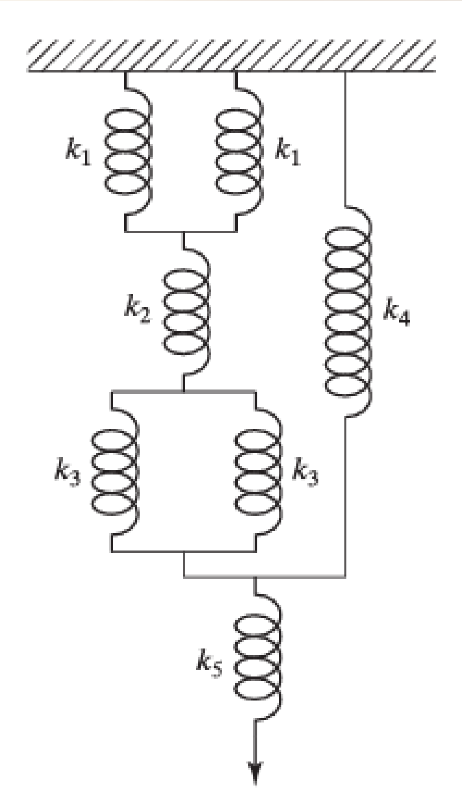
$$k_{eq} = \frac{E^2 \cdot a \cdot t^3 \cdot \pi \cdot d^2}{4 \cdot E \cdot (\pi \cdot d^2 \cdot b^3 + a \cdot t^3 \cdot l)}$$

$$k_{eq} = \frac{E}{4} \cdot \left(\frac{\pi \cdot a \cdot t^3 \cdot d^2}{\pi \cdot d^2 \cdot b^3 + l \cdot a \cdot t^3} \right)$$



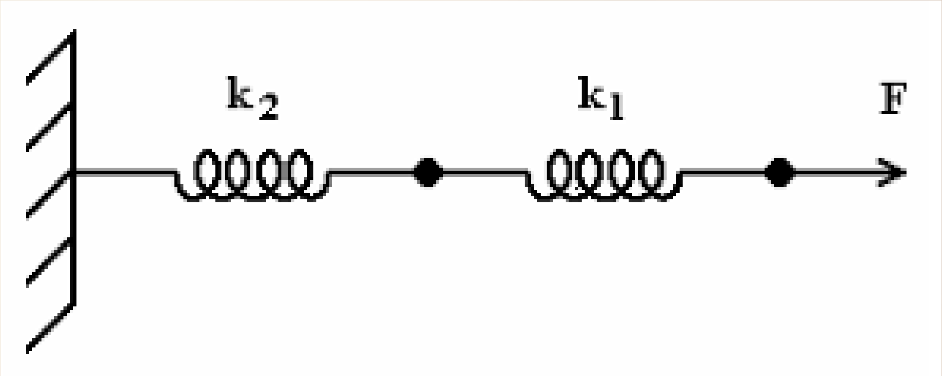
Exercícios Propostos

1. Determine a constante elástica equivalente do sistema mostrado na figura.



Exercícios Propostos

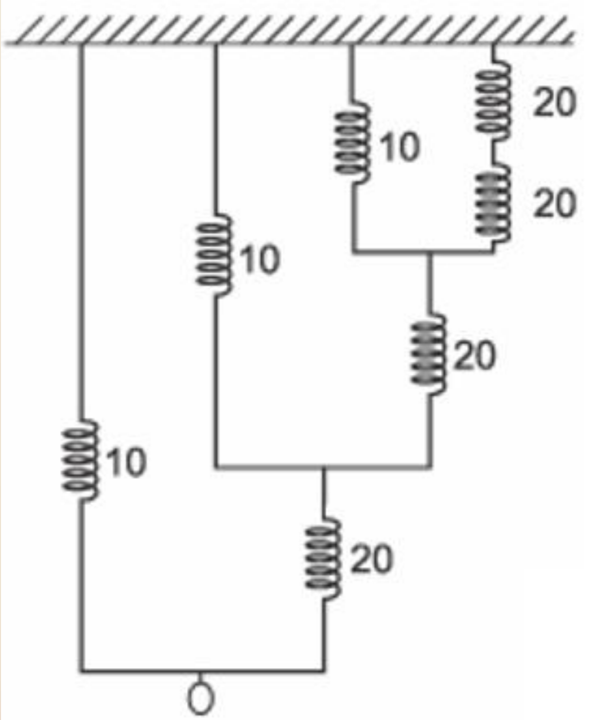
2. Uma mola de constante elástica k_1 = 24 N/m é associada em série a uma segunda mola de constante elástica k_2 = 45 N/m, que está conectada a uma parede rígida na outra extremidade, conforme mostra a figura a seguir. Uma pessoa aplica uma força F à uma primeira mola, distendendo-a em 15 cm relativo ao seu comprimento não deformado em equilíbrio. Calcule a distensão da segunda mola, em cm.



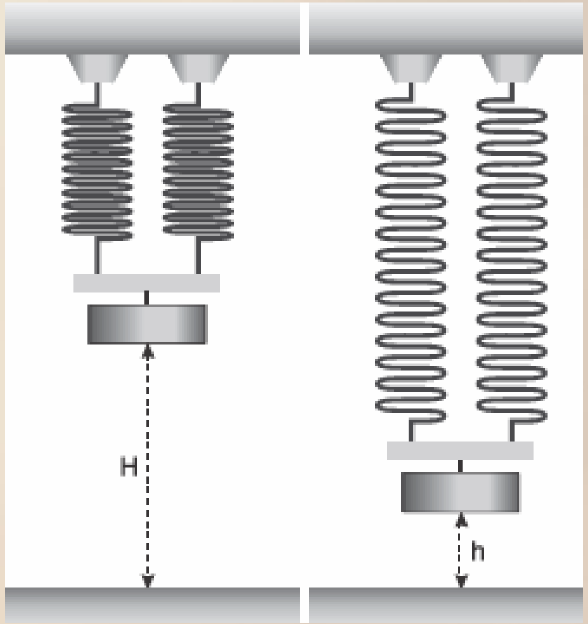
Exercícios Propostos

Aula 3

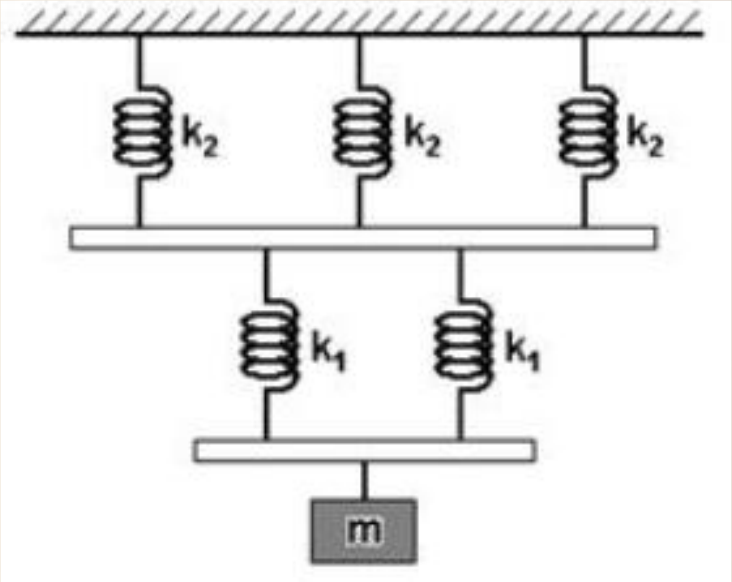
3. Um sistema com molas é montado conforme mostrado na figura a seguir, onde a constante elástica de cada uma delas é, alternadamente, 10 N/m e 20 N/m. Determine o valor da constante elástica equivalente do sistema, em N/m.



4. Uma massa de 0,50 kg está presa na extremidade de um sistema formado por duas molas em paralelo, conforme mostra a figura a seguir. As molas são idênticas, de constante elástica e massa desprezível. A outra extremidade do sistema está fixa em um apoio de teto de modo que o sistema fica verticalmente posicionado. A massa é lentamente solta da posição de relaxamento do sistema, a uma altura H = 12 cm do plano de uma mesa, até que fique em repouso. Determine a que altura h da mesa o sistema atingirá novamente o seu ponto de equilíbrio estático. Considere $g = 9{,}81\ m/s^2$.



5. Um sistema é constituído por molas de constantes k_1 e k_2, respectivamente, barras de massas desprezíveis e um corpo de massa *m*, como mostrado na figura. Determine a frequência natural desse sistema.



Obrigado Pela Atenção

Nos Encontramos na Próxima Aula

EngBrasil
EDUCAÇÃO E ENGENHARIA