

travaux ont permis de poser les bases de ce qu'on a appelé la Théorie des Groupes, et plus spécifiquement de ce qu'on a nommé les Groupes de Galois à titre posthume.

Introduction aux travaux de Galois

Pour bien comprendre la richesse des travaux d'Évariste Galois il est nécessaire de rentrer dans les interrogations profondes qui l'ont motivé. Un des problèmes non résolus à son époque était de trouver une solution générale d'une équation polynomiale de degré 5.

Dans notre quotidien, on est très souvent exposé à la résolution d'équation de degrés 1 et 2. Par exemple, se demander combien de litres de carburant on peut avoir pour une somme donnée en connaissant le prix au litre ; ça revient à résoudre une équation polynomiale du premier degré. Connaître la durée de la chute d'un objet en fonction de sa hauteur revient à une résolution d'une équation polynomiale du second degré. À partir du troisième degré on rentre dans des domaines plus techniques comme le transfert de liquides dans des cuves ; ou en degré quatre pour le calcul des vibrations de ponts ou de poutres.

Concernant le "degré cinq", on entre dans des domaines bien plus techniques et spécialisés dont même Évariste Galois n'aurait jamais imaginé l'existence. En effet on peut voir ces équations dans certains rendus en 3D de surfaces complexes, ou dans des calculs demandant une grande précision, et nécessitant des développements limités de fonctions à l'ordre cinq.

Cependant, à son époque, il y a eu un problème intéressant posé par Joseph-Louis Lagrange qu'on peut considérer comme l'inspirateur d'Évariste Galois. En effet, lors de son questionnement sur les problèmes à trois corps en astronomie, Lagrange a pu établir l'existence de cinq points de stabilité des systèmes qu'on a nommé les Points de Lagrange L_1, L_2, L_3, L_4 et L_5 . Ces points sont les solutions d'une équation polynomiale du cinquième degré dont heureusement il y a trois solutions évidentes – ce qui a permis d'en calculer facilement les deux autres. C'est par exemple sur le point L_2 que le JWST (James Webb Space Telescope) a été placé sous orbite car ce point de Lagrange garantit que le télescope sera toujours dans l'ombre de la Terre, assurant *de facto* un maintien à très basse température des instruments s'y trouvant.

Ces codes correcteurs (notamment celui de Hamming) manient habilement les apports de la théorie des groupes, des équations linéaires et de certaines symétries bien exploitées.

Pour illustration, face au message :

“Bpnjour comment allz vous !” le code détecteur dira qu'il y a deux problèmes, et le code correcteur renverra *“Bonjour comment allez-vous !”*. Nous l'utilisons tous les jours, et nous ne nous rendons pas compte de la science qui s'y trouve, et encore moins de l'imprégnation des théories de Galois dans le quotidien de la correction de nos messages.

La puissance des codes détecteurs et correcteurs ont participé à l'essor du monde numérique en rendant fiable à la fois le stockage de données et leur transmission sous quelque forme que ce soit. Par exemple pour mon époque, un CD-ROM rayé peut être lu correctement, et aujourd'hui le GPS nous permet d'avoir des positions précises malgré la présence de nombreux signaux perturbateurs ou d'obstacles qui entraînent des erreurs dans les messages reçus.

Plus généralement, lorsqu'on sait modéliser de manière assez fiable les perturbations que peuvent rencontrer un signal, on devient parfaitement capable de restaurer de vieux films sur pellicule abîmés, comme s'ils venaient d'être tournés au format numérique ! Cela s'étend même aux tableaux faits en peinture pour en guider la restauration.

Au-delà de la possibilité de récupérer des erreurs de transmission, l'idée de groupe a permis de développer de puissantes méthodes d'analyse des nombres. La théorie des groupes a conduit à l'émergence de la théorie des nombres, et ouvert la voie à la cryptographie.

En 1978, Ronald Rivest, Adi Shamir et Leonard Adleman ont publié un algorithme portant les initiales de leurs noms (RSA) et permettant de faire du cryptage d'information à l'aide de clés publiques. Une clé publique est comme une fonction de cryptage que le destinataire d'un message peut donner à tout le monde pour crypter les messages qu'on lui envoie. En revanche, seul le destinataire peut déchiffrer à l'aide d'une clé privée (également une fonction de cryptage) que lui seul connaît et qu'il génère à partir de la clé publique.

Les deux piliers de ces algorithmes sont deux constats :

1. Si il est facile de dire que $7 * 13 = 91$, il est plus difficile de retrouver que $91 = 7 * 13$.
2. Résoudre l'équation $x^n = a$ dans un groupe fini de nombres est très compliqué quand n n'est pas premier

dans le même lycée. En 1822, l'École Normale Supérieure avait été dissoute, fermée par les autorités. On peut certes penser que c'était une solution de paresse.

[[L'École n'était pas drôle du tout : trois prières, une lecture le soir, une conférence mensuelle, renvoi pour deux conférences manquées.]]

Polytechnique, elle, avait été soigneusement épurée. L'opération dut cependant être bâclée car en 1830 les polytechniciens joueront un rôle éminent pendant les Trois Glorieuses. (Je parle des journées françaises de juillet 1830.) Je vous épargnerai des considérations banales sur l'agitation politique sous la Restauration. Mais j'aimerais citer un document qui possède un lien direct avec Galois. Il s'agit d'un rapport de M.Laborie au ministre de l'Éducation Nationale.

[[Monsieur Berthot avait en effet été récompensé de son zèle un peu trop gênant par un déplacement et il avait été remplacé au poste de proviseur par ce M.Laborie.]] Ce dernier écrivait donc :

"L'esprit religieux n'existe pas chez les élèves... les bons, en petit nombre, rougissent de faire un signe de croix... Ils doivent cacher leur piété, pour se soustraire aux sarcasmes et même aux persécutions de l'immense majorité. On tient les propos les plus impies sur nos saints ministères... je suis effrayé du libertinage d'esprit et de coeur qui règne parmi les élèves... je n'exagère pas, le mal est à son comble."⁵

Il me semble que ce rapport éclaire fort nettement les incidents de Louis le Grand ainsi

⁵ avec son ironie habituelle G.P. note en marge : « tartine de 2 pages comme ça »

compagnon Duchatelet fut condamné à trois mois de prison et lui-même à six – son affaire précédente lui valait probablement cette sévérité accrue. Ces six mois s'ajoutaient aux trois mois de "préventive". En janvier, il fut transféré à la prison de la Force. Pour imaginer la silhouette du prisonnier Galois, voici la liste de ses effets, dressée par l'Administration : "chapeau, cravate, redingote, gilet, pantalon noir, sabots ; le tout déjà usagé". Une silhouette qui n'est pas sans rappeler celle de Chaplin, un peu ridicule, un peu pathétique... d'un grand mathématicien.

Au printemps, il revint à Sainte-Pélagie. Le médecin de la prison le convoqua et l'examina. Il fut décidé que Galois purgerait le reste de sa peine dans la maison de repos de M.Faultrier, rue de l'Oursine¹⁸. Il quitta Sainte-Pélagie le 16 mars. Le 29 avril, date de l'expiration de sa peine, il eut le droit de quitter la maison de repos. Il lui restait alors un mois et un jour à vivre.

[[1re liaison féminine, apparemment malheureuse, qui fut probablement la cause du duel]]

Nous ne savons comment Galois employa ce mois de mai 1832, le dernier de sa vie.

Le 25 mai, Galois envoya à son ami Chevalier une lettre désespérée contenant des allusions transparentes à une affaire de coeur malheureuse. Je cite : "...comment détruire la trave d'émotions aussi violentes que celles où j'ai passé ? Comment se consoler d'avoir épuisé en un mois la plus belle source de bonheur qui soit dans l'homme, de l'avoir épuisée sans bonheur, sans espoir, sûr qu'on est de l'avoir

¹⁸ *[[probablement tenue par un indicateur]]*

créativité ni de la réactivité. Certes, la France peut s'enorgueillir de sommités mondiales (chercheurs, médaillés Fields...) mais cela ne dispense pas d'avoir une population tout entière capable de trouver – de façon très simple – à combien se monterait la TVA (mettons au taux de 15%) sur un article présenté « hors taxes » à 60,00 euros. Tout élève de primaire devrait savoir le faire – et *sans* ordinateur. De même que calculer la surface des murs de sa chambre pour en changer le papier décoratif ou en refaire la peinture.

Fort approprié, ci-dessous, un article du Canard enchaîné du 11 décembre 2024, intitulé « Villani président ! » :*

CALAMITEUX, le niveau des jeunes Français en maths ? Selon l'enquête Timss, menée dans les classes d'une cinquantaine de pays, nos élèves de CM1 et de 4^e végètent à la dernière place de l'Union européenne. Immédiatement, le ministère de l'Education a poussé un cri. Non pas d'alarme, mais de soulagement : « **Entre 2019 et 2023, les scores des élèves scolarisés en France restent stables en mathématiques et en sciences.** »

Heureusement, nos parlementaires demeurent impavides devant l'addition des déficits. Sans doute espèrent-ils que le chiffrage de la dette résulte d'une erreur due à notre bas niveau en maths. Au pays de Blaise Pascal, d'Evariste Galois, d'Henri Poincaré et du groupe Bourbaki, une seule solution contre la dissolution : Cédric Villani président !

F. P.

* Cédric Villani est l'un des médaillés Fields. Cette prestigieuse récompense (l'équivalent du prix Nobel pour les Mathématiques) est attribuée depuis 1936 à celui ou celle qui apporte une contribution majeure par ses travaux avant l'âge de 40 ans. La médaille est décernée tous les quatre ans à quatre mathématiciens (nnes) au plus.

Onze « médaillés Fields » sont d'anciens élèves de l'École normale supérieure de Paris : Laurent Schwartz (1950), Jean-Pierre Serre (1954), René Thom (1958), Alain Connes (1982), Pierre-Louis Lions (1994), Jean-Christophe Yoccoz (1994), Laurent Lafforgue (2002), Wendelin Werner (2006), Cédric Villani (2010), Ngô Bảo Châu (2010) et Hugo Duminil-Copin (2022). Ceci ferait de l'École normale supérieure la première institution du palmarès si le classement portait sur l'établissement d'origine des médaillés et non le lieu d'obtention.

Concernant le pays d'origine, la France se trouve également bien classée si l'on considère le lieu de formation des médaillés et on aboutit à un total de 15 médaillés Fields issus de laboratoires français, ce qui pourrait placer la France en tête des nations formatrices de ces mathématiciens. (source Wikipédia)

La tragédie de Galois, c'est son romantisme – qui le perdra. Si la toile de Delacroix représente un sacrifice, Évariste a-t-il volontairement donné sa vie en sachant pertinemment être une « victime politique » ? Car il a solutionné l'équation de degré cinq, il peut quitter notre monde tranquille. Sur la toile, les révoltés dans une marche volontariste vers le modernisme, en contrepartie d'un Galois isolé « contre » ses pairs, à terre.

Le drapeau de Delacroix est coupé en haut, c'est une approche picturale très moderne ; comme pour cacher quelque chose ; comme Galois qui ne dit pas tout de sa démonstration – également une œuvre d'art. La différence entre ces deux artistes est qu'Eugène est en 1831 déjà très reconnu et Évariste un parfait inconnu, mais en maniant allégorie et réalisme... Galois a cette idée lumineuse de simplification par symétries.

Le tableau inquiétait le pouvoir en place ; la démonstration / théorie de notre Évariste inquiète le clan des matheux en poste. Trop moderne, avant l'heure. Dans le journal *Franc-Tireur*, le journaliste François-Henri Désétable aura la bonne idée de titrer, en août 2023, son article (que je vous recommande) avec « Évariste Galois, rebelle au carré ».

« Nos héros de vingt ans... » souvent célébrés dans les poèmes sont souvent des étudiants. Liberté, d'accord, mais « ordre public » est le premier commandement, la devise de l'Orléanisme. Bref, le peuple a tout fait mais n'a rien obtenu.

Rembobinons rapidement le fil des événements de ces Trois Glorieuses qui virent le régime de Charles X s'effondrer

1830 représente la soif de liberté. La Révolution de 1789 a oublié 80 % de la population ; la misère règne et 1830 est une crise de régime. En ce matin du 27 juillet, on n'a pas d'armes ? Qu'importe, on se servira sur les cadavres de soldats ! et le 28 juillet voit surgir 4 000 barricades. Boulevards et faubourgs sont en feu, et le drapeau tricolore apparaît comme symbole de ralliement. Delacroix, raconte Hugo, l'observe flotter sur les tours de Notre-Dame. Au soir du 29 juillet, Louvre et Palais-Royal sont pris. On dénombre 1 000 morts. La ville appartient aux Insurgés !!!

L'ordre ancien est mis au tombeau et Delacroix, qui a constaté de ses yeux l'insurrection, concrétisera ce tableau (mathématique car très construit) avec des indications de teintes très précises sur ses ébauches. Galois, de son côté, à défaut d'avoir combattu pour la Patrie, offrira son savoir de « réfractaire à l'autorité », son génie, son intuition. Évariste, incompris, malheureux, résigné à mourir, comme tous les artistes ? symbolique martyr aux démonstrations séduisantes ? Vaincre par la force – celle de l'esprit.